



Общероссийский математический портал

Р. И. Паровик, Особенности вычисления функции типа Миттаг-Леффлера в системе компьютерной математики Maple, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2012, выпуск 2(5), 51–61

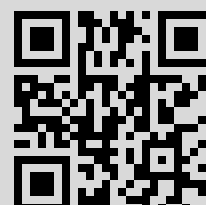
DOI: <http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2012-5-2-51-61>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 77.82.202.29

18 июля 2016 г., 12:24:53



УДК 519.688

ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ «MAPLE»

Паровик Р.И.^{1,2}

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

² Филиал Дальневосточного Федерального государственного университета, 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1

E-mail: romanparovik@gmail.com

В работе предложены вычислительные алгоритмы для корректного вычисления функции типа Миттаг-Леффлера с дробным параметром $1 < \alpha < 2$ в математическом пакете MAPLE.

Ключевые слова: фрактальный параметрический осциллятор, функция типа Миттаг-Леффлера, контур Ханкеля, интегральное представление

© Паровик Р.И., 2012

MSC 65R10

CALCULATION SPECIFIC FUNCTIONS OF MITTAG-LEFFLER IN THE COMPUTER MATHEMATICS «MAPLE»

Parovik R.I.^{1,2}

¹ Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

² Branch of the Far Eastern Federal State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Tushkanova st., 11/1, Russia

E-mail: romanparovik@gmail.com

In this work the computational algorithms to correctly calculate the functions of Mittag-Leffler with fractional parameter in mathematical package MAPLE.

Key words: fractal parametric oscillator, function of Mittag-Leffler, circuit Hankel, integral representation

© Parovik R.I., 2012

Введение

В настоящее время широкое развитие получило математическое моделирование фрактальных процессов. Под фрактальными процессами понимаются различные процессы природных, экономических, историко-социальных явлений с учетом их фрактальных свойств. Математическая интерпретация таких явлений дается, хорошо разработанным за более чем 300 лет, аппаратом дробного исчисления [1].

Особенностью математических построений фрактальных моделей является обобщение дифференциальных уравнений целочисленного порядка на вещественный порядок, что приводит к решениям со степенной зависимостью. В качестве такого решения часто выступает целая специальная функция типа Миттаг-Леффлера.

Вычисление этой функции по определению в системах типа «MAPLE» приводит зачастую к некорректным результатам: либо совсем не вычисляется, либо из-за погрешности вычислений дает неверный ответ. Поэтому в работе мы остановимся подробно на вычислительном алгоритме этой функции, но сначала приведем некоторые ее свойства.

Функция типа Миттаг-Леффлера и ее некоторые свойства

В работе [2] Г. Миттаг-Леффлер ввел в рассмотрение обобщенную показательную функцию:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \alpha \in [0, \infty]. \quad (1)$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера. Из соотношения (1) видно, что если $z = 0$, то функция Миттаг-Леффлера становится константой $E_{\alpha}(0) = 1$, а также в случае $\alpha = 1$ становится экспонентой $E_1(z) = e^z$. Более подробно о свойствах функции Миттаг-Леффлера можно узнать в работе [2].

В работе [3] исследуется функция типа Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}. \quad (2)$$

Функцию (2) принято называть функцией типа Миттаг-Леффлера. Она является решением многих дифференциальных уравнений в производных дробного порядка. Например, фрактальное осцилляционное уравнение [4], а также в работе автора [5]:

$$\partial_{0t}^{\beta} u(\tau) + \omega^{\beta} u(t) = 0, \quad 1 < \beta < 2$$

имеет решение

$$u(t) = C_1 E_{\beta, 1}(-(\omega t)^{\beta}) + C_2 t E_{\beta, 2}(-(\omega t)^{\beta}),$$

где C_1 и C_2 – константы интегрирования, которые определяются из начальных условий. Отметим некоторые свойства функции типа Миттаг-Леффлера, вытекающие из определения (2):

$$1) \quad E_{\alpha, \beta}(0) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}, E_{\alpha, 1}(z) = E_{\alpha}(z) \Rightarrow E_{1, 1}(z) = e^z;$$

$$2) E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad E_{2,1}(z) = \operatorname{ch}(\sqrt{z}) \text{ и } E_{2,2}(z) = \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}};$$

$$3) E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\beta+\alpha}(z) \text{ и } E_{\alpha,\beta}(z) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + z\alpha \frac{dE_{\alpha,\beta+1}(z)}{dz};$$

$$4) \left(\frac{d}{dz}\right)^m \left(z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z^\alpha)\right) = z^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(z^\alpha), \quad m \geq 1;$$

$$5) E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} E_{\alpha/m,\beta} \left(z^{1/m} e^{i2\pi k/m}\right);$$

$$6) \int_0^z z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) t^{\beta-1} dt = z E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha).$$

Также справедливы асимптотические разложения функции типа Миттаг-Леффлера при больших значениях $|z|$:

а) при $|\arg(z)| \leq \alpha_1 \pi$, $\alpha_1 \in (\alpha/2, \alpha)$, $\alpha \in (0, 2)$, $n \in N$ имеем

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \exp\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right);$$

б) при $\alpha_1 \pi \leq |\arg(z)| \leq \pi$, $\alpha_1 \in (\alpha/2, \alpha)$, $\alpha \in (0, 2)$, $n \in N$ имеем

$$E_{\alpha,\beta}(z) = - \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right);$$

в) в случае $\alpha \geq 2$, $n \in N$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} \sum_m Z_m^{1-\beta} \exp\left(Z_m^{\frac{1}{\alpha}}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O\left(\frac{1}{|z|^{n+1}}\right),$$

суммирование для первого слагаемого производится для тех m , при которых выполнено условие:

$$|\arg(z) + 2\pi m| \leq \varepsilon + \alpha\pi/2, \quad \varepsilon > 0.$$

Доказательства асимптотических разложений функций типа Миттаг-Леффлера можно найти в работе [3].

Представление функции типа Миттаг-Леффлера в комплексной плоскости

Будем считать $\beta > 0$. Рассмотрим контур (петлю) Ханкеля $\gamma(\varepsilon, \delta)$ (см. рис.), который состоит из следующих трех частей: луча $S_\delta = \{\arg(\xi) = -\delta, |\xi| \geq \varepsilon\}$, луча $S_{-\delta} = \{\arg(\xi) = \delta, |\xi| \geq \varepsilon\}$ и дуги окружности $C_\delta(0, \varepsilon) = \{-\delta \leq \arg(\xi) \leq \delta, |\xi| = \varepsilon\}$.

В свою очередь контур $\gamma(\varepsilon, \delta)$ разбивает плоскость ξ на две бесконечные подобласти: $G^{(-)}(\varepsilon, \delta)$ и $G^{(+)}(\varepsilon, \delta)$. В работе [3] показано, что если выполняются условия

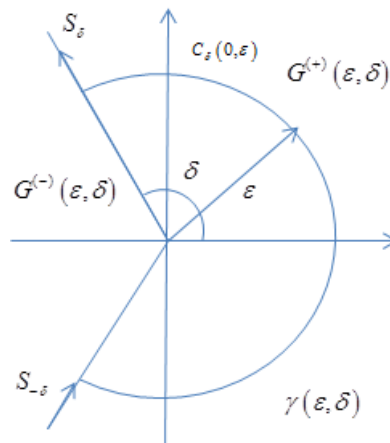


Рис. Контур Ханкеля

$0 < \alpha < 2$ и $\alpha\pi < \delta \leq \min\{\pi, \pi\alpha\}$, то имеют место следующие интегральные представления:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{2\alpha\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \delta)} \frac{e^{\xi^{\frac{1}{\alpha}}} \xi^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}{\xi - z} d\xi, \quad z \in G^{(-)}(\varepsilon, \delta), \quad (3)$$

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\beta}{\alpha}} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{1}{2\alpha\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon, \delta)} \frac{e^{\xi^{\frac{1}{\alpha}}} \xi^{\frac{1-\beta}{\alpha}}}{\xi - z} d\xi, \quad z \in G^{(+)}(\varepsilon, \delta).$$

Интеграл, стоящий в соотношениях (3), вычисляется по каждой из частей контура $\gamma(\varepsilon, \delta)$, считая $\xi = \varepsilon e^{i\delta}$ и следуя результатам работ [6], [7]:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \int_{\varepsilon}^{\infty} K(\alpha, \beta, \delta, r, z) dr + \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} P(\alpha, \beta, \varepsilon, \phi, z) d\phi, \quad z \in G^{(-)}(\varepsilon, \delta),$$

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\beta}{\alpha}} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} + \int_{\varepsilon}^{\infty} K(\alpha, \beta, \delta, r, z) dr +$$

$$+ \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} P(\alpha, \beta, \varepsilon, \phi, z) d\phi, \quad z \in G^{(+)}(\varepsilon, \delta), \quad (4)$$

$$K(\alpha, \beta, \delta, r, z) = \frac{1}{\alpha\pi} r^{\frac{1-\beta}{\alpha}} e^{r^{\frac{1}{\alpha}} \cos(\delta/\alpha)} \frac{r \sin(\varphi - \delta) - z \sin(\varphi)}{r^2 - 2rz \cos(\delta) + z^2},$$

$$P(\alpha, \beta, \varepsilon, \phi, z) = \frac{\varepsilon^{1+(1-\beta)/\alpha} e^{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \cos(\phi/\alpha)} (\cos(\omega) + i \sin(\omega))}{2\alpha\pi} \frac{1}{\varepsilon e^{i\phi} - z},$$

$$\varphi = r^{\frac{1}{\alpha}} \sin(\delta/\alpha) + \delta(1 + (1-\beta)/\alpha), \quad \omega = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} \sin(\phi/\alpha) + \phi(1 + (1-\beta)/\alpha).$$

Интегральное представление (4) состоит из двух частей (интегралов): первый интеграл – монотонная часть, а второй – осцилляционная. Рассмотрим случай $0 < \alpha < 1$. Тогда получим, что $\delta = \min\{\pi, \alpha\pi\} = \alpha\pi$. Поэтому будем иметь:

$$K(\alpha, \beta, \alpha\pi, r, z) = \bar{K}(\alpha, \beta, r, z) =$$

$$= \frac{r^{\frac{1-\beta}{\alpha}} e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}} r \sin(\pi(1-\beta)) - z \sin(\pi(1-\beta+\alpha))}{\alpha\pi \frac{r^2 - 2rz \cos(\alpha\pi) + z^2}{}}$$

Здесь возможны три случая:

$$1) |\arg(z)| = \alpha\pi, \quad 2) |\arg(z)| > \alpha\pi, \quad 3) |\arg(z)| < \alpha\pi.$$

В работе [7] доказаны теоремы для этих случаев. Приведем результат.

В первом случае функцию типа Миттаг-Леффлера можно вычислить с помощью следующего соотношения:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \int_{\varepsilon}^{\infty} \bar{K}(\alpha, \beta, r, z) dr + \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} P(\alpha, \beta, \varepsilon, \phi, z) d\phi, \quad \varepsilon \geq |z|. \tag{5}$$

Во втором случае

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \begin{cases} \int_{\varepsilon}^{\infty} \bar{K}(\alpha, \beta, r, z) dr, & \beta < 1 + \alpha \\ -\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}}}{r^2 - 2rz \cos(\alpha\pi) + z^2} dr - \frac{1}{z}, & \beta = 1 + \alpha \\ \int_{\varepsilon}^{\infty} \bar{K}(\alpha, \beta, r, z) dr + \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} P(\alpha, \beta, \varepsilon, \phi, z) d\phi, & \varepsilon > 0, \beta > 0 \end{cases} \tag{6}$$

В третьем случае

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \begin{cases} \int_{\varepsilon}^{\infty} \bar{K}(\alpha, \beta, r, z) dr + \frac{z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}}{\alpha}, & \beta < 1 + \alpha \\ -\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-r^{\frac{1}{\alpha}}}}{r^2 - 2rz \cos(\alpha\pi) + z^2} dr + \frac{e^{z^{\frac{1}{\alpha}}} - \alpha}{\alpha z}, & \beta = 1 + \alpha \\ \int_{\varepsilon}^{\infty} \bar{K}(\alpha, \beta, r, z) dr + \int_{-\alpha\pi}^{\alpha\pi} P(\alpha, \beta, \varepsilon, \phi, z) d\phi + \frac{z^{\frac{1-\beta}{\alpha}} e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}}{\alpha}, & \varepsilon > 0, \beta > 0 \end{cases} \tag{7}$$

Алгоритм вычисления функции типа Миттаг-Леффлера

В интегральных представлениях (5), (6), (7) интерес представляет несобственный интеграл. Его можно представить в качестве определенного интеграла. Введем, согласно работе [7], фиксированную константу $q = 0,9$. Рассмотрим следующие три случая:

$$1) |z| \leq q, 0 < \alpha, \quad 2) |z| > q, 0 < \alpha \leq 1, \quad 3) |z| > q, 1 < \alpha.$$

В первом случае, согласно (2):

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{k_0} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)} + \eta(z), \quad |\eta(z)| < \rho,$$

$$k_0 = \max \{ \lfloor (1-\beta)/\alpha \rfloor + 1, \lfloor \ln(\rho(1-|z|)) / \ln(|z|) \rfloor \}.$$

Здесь ρ – точность вычисления, $\lfloor \rfloor$ – целая часть числа.

Во втором случае

$$\int_a^{\infty} \bar{K}(\alpha, \beta, r, z) dr = \int_a^{r_0} \bar{K}(\alpha, \beta, r, z) dr + \eta(z), \quad |\eta(z)| < \rho, \quad a \in (0, \varepsilon),$$

$$r_0 = \max \left\{ 1, 2|z|, (-\ln(\pi\rho/6))^{\alpha} \right\}.$$

В третьем случае, с учетом свойства 5, где $m = [\alpha] + 1$ и $0 < \alpha/m \leq 1$ функция типа Миттаг-Леффлера вычисляется по формуле:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} E_{\alpha/m, \beta} \left(z^{1/m} e^{i2\pi k/m} \right)$$

для случаев $|z|^{1/m} \leq q$ и $|z|^{1/m} > q$.

Вычисление функции типа Миттаг-Леффлера с помощью системы компьютерной математики MAPLE

Положим $\rho = 10^{-4}$. с учетом методики рассмотренной выше и свойств функции типа Миттаг-Леффлера составим на языке MAPLE следующую процедуру ML1:

```

> ML1:= proc (alpha, beta, x)
  local k0, phi, r, rho, r0;
  r0:=evalf(max(1, 2*abs(x), trunc(-ln(0.0001*Pi/6))^alpha));
  if x=0 then 1/GAMMA(beta)
elif alpha=1 and beta=1 then evalf(exp(x))
  elif alpha=1 and beta=2 then evalf((exp(x)-1)/x)
  elif alpha=2 and beta=2 then evalf(sinh(sqrt(x))/sqrt(x))
  elif alpha = 2 and beta = 1 then evalf(cosh(x^(1/2)))
  elif 0<alpha and alpha < 1 then
    if abs(x)<0.9 then
      k0:=max(trunc((1-beta)/alpha)+1, trunc(ln(0.0001*(1-abs(x)))/ln(abs(x)))));
      sum(x^k/GAMMA(beta+alpha*k), k=0 .. k0)
    elif abs(x)<trunc(10+5*alpha) then
      if alpha*evalf(Pi)<abs(evalf(argument(x))) and
0.0001< abs(evalf(abs(argument(x))-alpha*evalf(Pi))) then
        if beta<1+alpha then
          evalf(Int(r^((1-beta)/alpha)*exp(-r^(1/alpha))*(r*sin(Pi*(1-beta))-
x*sin(Pi*(1-beta+alpha)))/(alpha*Pi*(r^2-2*x*r*cos(alpha*Pi)+x^2)), r=0..r0))
        else evalf(Int(r^((1-beta)/alpha)*exp(-r^(1/alpha))*(r*sin(Pi*(1-beta))-
x*sin(Pi*(1-beta+alpha)))/(alpha*Pi*(r^2-2*x*r*cos(alpha*Pi)+x^2)),r=1..r0))+
          evalf(Int(0.5*exp(cos(phi/alpha))*
exp(I*(phi*(1+(1-beta)/alpha)+sin(phi/alpha)))/(alpha*Pi*(exp(I*phi)-x)), phi =
alpha*evalf(Pi)..-alpha*evalf(Pi)))
        end if
      elif abs(x)<trunc(10+5*alpha) and abs(argument(x)) < alpha*evalf(Pi) and
0.0001<abs(abs(argument(x))-alpha*evalf(Pi))) then

```

```

    if beta < 1+alpha then evalf(Int(r^((1-beta)/alpha)*exp(-r^(1/alpha))*(r*sin(Pi*(1-
beta))-x*sin(Pi*(1-beta+alpha)))/(alpha*Pi*(r^2-2*x*r*cos(alpha*Pi)+x^2)), r=0..r0))+
x^((1-beta)/alpha)*exp(x^(1/alpha))/alpha
    else evalf(Int(r^((1-beta)/alpha)*exp(-r^(1/alpha))*(r*sin(Pi*(1-beta))-x*sin(Pi*(1-
beta+alpha)))/(alpha*Pi*(r^2-2*x*r*cos(alpha*Pi)+x^2)), r=0.5*abs(x)..r0)+
simplify(evalf(Int(0.5*(0.5*abs(x))^(1+(1-beta)/alpha)*exp((0.5*abs(x))^(1/alpha)*
cos(phi/alpha))*(cos(phi*(1+(1-beta)/alpha)+(0.5*abs(x))^(1/alpha)*sin(phi/alpha))+
I*sin(phi*(1+(1-beta)/alpha)+(0.5*abs(x))^(1/alpha)*sin(phi/alpha)))/(alpha*
Pi*(0.5*abs(x)*exp(I*phi)-x)), phi=alpha*Pi..-alpha*Pi)))+
x^((1-beta)/alpha)*exp(x^(1/alpha))/alpha end if
    else evalf(Int(r^((1-beta)/alpha)*
exp(-r^(1/alpha))*(r*sin(Pi*(1-beta))-
x*sin(Pi*(1-beta+alpha)))/(alpha*Pi*(r^2-2*x*r*cos(alpha*Pi)+x^2)),
r=0.5*abs(x)+0.5..r0))+
simplify(evalf(Int(0.5*(0.5*abs(x)+0.5)^(1+(1-beta)/alpha)
*exp((0.5*abs(x)+0.5)^(1/alpha)*cos(phi/alpha))*(cos(phi*(1+(1-beta)/alpha)+
(0.5*abs(x)+0.5)^(1/alpha)*sin(phi/alpha))+I*sin(phi*(1+(1-beta)/alpha)+
(0.5*abs(x)+0.5)^(1/alpha)*sin(phi/alpha)))/(alpha*Pi*((0.5*abs(x)+0.5)*exp(I*phi)-
x)), phi=alpha*Pi..alpha*Pi)))+
x^((1-beta)/alpha)*exp(x^(1/alpha))/alpha
    end if
    else k0:=trunc(-ln(0.0001)/ln(abs(x)));
    if abs(evalf(argument(x)))<0.75*alpha*evalf(Pi) then x^((1-beta)/alpha)*
exp(x^(1/alpha))/alpha-(sum(x^(-k)/GAMMA(beta-alpha*k), k=0..k0)) else
simplify(evalf(-(sum(x^(-k)/GAMMA(beta-alpha*k), k=0..k0))))
    end if
    end if
    end if
    end if
end proc:

```

В случае, когда $1 < \alpha < 2$ или $m = 2$, составим процедуру ML2:

```

> ML2:=proc(a,b,z)
if z=0 then 1/GAMMA(b)
elif a=2 and b=1 then
cosh(sqrt(z));
elif a=2 and b=2 then
evalf(sinh(sqrt(z))/sqrt(z))
elif 1<a and a<2 then
0.5*(ML1(a/2,b,z^0.5)+ML1(a/2,b,-z^0.5))
fi;
end proc:

```


Результаты вычислений функции типа Миттаг-Леффлера

ПРИМЕР 1. Сначала вычислим функцию типа Миттаг-Леффлера согласно определению (2):

> **a1:=0.7;**

a1 := 0.7

> **b1:=1.3;**

b1 := 1.3

> **z:=0.7;**

z := 0.7

> **t:=time();**

t := 3391.446

> **E:=sum(z^k/GAMMA(b1+a1*k),k=0..infinity);**

E = 2.029026906 - 0.5438226316 10⁻⁹ I

> **TIME=time()-t;**

TIME = 20.233

Вычислим эту же функцию с помощью процедуры ML1:

> **t1:=time();**

t1 := 3431.959

> **ML1(0.7,1.3,0.7);**

2.294030341

> **TIME=time()-t1;**

TIME = 0.

Результаты этого примера показывают, что методика, рассмотренная в работе, позволяет вычислять функцию типа Миттаг-Леффлера с сингулярностями.

ПРИМЕР 2. Пусть $1 < \alpha < 2$.

> **a1:=1.3;**

a1 := 1.3

```
> b1:=1.3;  
b1 := 1.3  
  
> z:=0.7;  
z := 0.7  
  
> t:=time();  
t := 3432.022  
  
> E:=sum(z^k/GAMMA(b1+a1*k),k=0..infinity);  
E = 1.530959770 - 0.2083825586 10-9 I  
  
> TIME=time()-t;  
TIME = 464.508  
  
> ML2(1.3,1.3,0.7);  
1.707760854  
  
> TIME=time()-t;  
TIME = 0.
```

Из рассмотренного примера видно, что не только процедура ML2 корректно вычисляет функцию типа Миттаг-Леффлера, но и делает это гораздо быстрее, чем по определению (2). Рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 3.

```
> a1:=0.6;  
a1 := 0.6  
  
> b1:=2;  
b1 := 2  
  
> z:=0.01;  
z := 0.01  
  
> t:=time();  
t := 3391.102
```

```
> E:=sum(z^k/GAMMA(b1+a1*k),k=0..infinity);
```

```
E := 1.007036573
```

```
> TIME=time()-t;
```

```
TIME = 0.328
```

```
> t1:=time();
```

```
t1 := 3391.430
```

```
> ML1(0.6,2,0.01);
```

```
1.007036098
```

```
> TIME=time()-t1;
```

```
TIME = 0.
```

В этом примере показано, что численный алгоритм для функции типа Миттаг-Леффлера очень хорошо согласуется с вычислениями по формуле (2).

Заключение

В работе рассмотрен вычислительный алгоритм специальной функции типа Миттаг-Леффлера с параметрами $0 < \alpha < 2$ и $\beta > 0$. Результаты вычислений имеют хорошее согласие с определением функции по формуле (2). Необходимо отметить, что скорость вычисления функции выше, чем скорость вычисления по определению. Это обусловлено тем, что в определении (2) мы грамотно «обрезали» бесконечный ряд погрешностью ρ .

Работу можно считать методической, а также использовать как рекомендацию по вычислению функции типа Миттаг-Леффлера в системе MAPLE.

Более детально с алгоритмом вычисления этой функции можно ознакомиться в работе [7], а в работе [8] предложен алгоритм вычисления двухпараметрической функции типа Миттаг-Леффлера.

Библиографический список

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит. 2003. 272 с.
2. Mittag-Leffler G. Sur la representation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogéne // Acta mathematica. 1905. V. 29. Issue 1. P. 101-181.
3. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.
4. Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena chaos, solitons and fractals. 1996. V. 7. № 9. P. 1461-1477.
5. Паровик Р.И. Обобщенное уравнение Матье // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 2 (3). С. 12-17.

6. Diethelm K., Ford N.J., Freed A.D., Luchko Yu. Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2005. V. 194. P. 743-773.
7. Gorenflo R., Mainardi F., Luchko Yu. Computation of the Mittag-Leffler function $E_{\alpha,\beta}(z)$ and its derivatives // Fract. Calculus Appl. Anal. 2002. V. 5. P. 491–518; 2003. V. 6. P. 111–112.
8. Яшагин Н.С. Математическое моделирование и исследование осцилляционных явлений в системах с памятью на основе аппарата дробного интегро-дифференцирования: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Самара, 2011. 186 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 04.10.2012