Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. В. Самута, В. А. Стрелова, Р. И. Паровик, Нелокальная модель неоклассического экономического роста Солоу, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2012, выпуск 2(5), 37–41

DOI: http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2012-5-2-37-41

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 77.82.202.29
18 июля 2016 г., 11:54:16

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2012. № 2(5). С. 37-41. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2012-5-2-37-41

УДК 519.86

НЕЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НЕОКЛАССИЧЕСКОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА СОЛОУ

Самута В.В., Стрелова В.А., Паровик Р.И.

Филиал Дальневосточного Федерального государственного университета, 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1

E-mail: romanparovik@gmail.com

В работе предложено обобщение модели Солоу, когда изменения ресурсов в производственной функции описывается производными дробных порядков в смысле Герасимова – Капуто. В результате мы приходим к важной экономической величине – капиталовооруженности, в которая характеризуется стпенными функциями типа Миттаг-Леффлера.

Ключевые слова: модель Солоу, оператор Герасимова – Капуто, функция типа Миттаг-Леффлера

© Самута В.В., Стрелова В.А., Паровик Р.И., 2012

MSC 00A71

NONLOCAL MODEL OF NEOCLASSICAL ECONOMIC GROWTH SOLOW

Samuta V.V., Strelova V.A., Parovik R.I.

Branch of the Far Eastern Federal State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Tushkanova st., 11/1, Russia

E-mail: romanparovik@gmail.com

In generalization of the Solow model, when the change in resources in the production function described derivatives of fractional order in the sense of the Gerasimov – Caputo. As a result, we come to an important economic value — capital-labor ratio, which is characterized in stpennymi functions of Mittag-Leffler.

Key words: Solow model, the operator Gerasimov – Caputo, function of the type Mittag-Leffler

© Samuta V.V., Strelova V.A., Parovik R.I., 2012

Введение

Как известно, модель Солоу считается односектороной динамической моделью экономического роста [1]. Особенностью такой экономической модели является то, что объектом исследования выступает единственный универсальный продукт (ЕУП), который в свою очередь потребляется в производственной и в непроизводственной сферах. В качестве ЕУП может выступать денежная оценка всей экономике. В производственной сфере потребление ЕУП может рассматриваться как инвестирование.

Постановка задачи

Экономическая система, которая описывается в рамках этой модели явно не учитывает возможность экспорта или импорта и определяется двумя группами параметров: внутренними и внешними [1]. Внутренние парметры, которые зависят непрерывно от времени t: $L(t)$ – трудовые ресурсы или затраты труда; $K(t)$ – производственные фонды $Y(t)$ – ЕУП, который определяется производственной функцией; $C(t)$ – непроизводственные фонды; $I(t)$ – инвестиции. Внешние параметры: $-1 < a < 1$ – годовой темп прироста трудовых ресурсов; $0 < b < 1$ – коэффициент выбытия капитала; $0 < \eta < 1$ – норма накопления. Будем считать, что производственные и трудовые ресурсы для производства годового ЕУП расходуются полностью.

ЕУП определяется производственной функцией неоклассического типа. Обозначим эту функцию $Y = F(K,L)$. Эта функция является однородной функцией первого порядка, т.е. выполнено $Y = F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L)$, а также обладает следующими свойствами:

1) $Y = F(K,0) = F(0,L) = 0$, т.е. отсутвие какого-либо из ресурсов не дает производить ЕУП;

2) $\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0$, $\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0$ — рост ресурсов влечет к росту производства;

3) $\dfrac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0$, $\dfrac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0$ – с увеличением количества ресурсов темп роста производства замедляется;

4) $Y = F(K,\infty) = F(\infty,L) = \infty$ – при неограниченном росте ресурсов производство неограниченно возрастает.

Из распространенных производственных функций, наиболее удовлетворяющих перечисленным выше условиям, является функция Кобба – Дугласа:

$$Y = F(K,L) = AK^{\gamma}L^{1-\gamma},\ A > 0,\ 0 < \gamma < 1. \qquad (1)$$

В работе [2] для вывода производственной функции предложена методика основанная на дробном исчислении [3]. Предполагается, что производственная функция $F(K,L)$ – является решением следующего дифференциального уравнения дробного порядка:

$$\mu_1 D_{0K}^{\alpha_K} + \mu_2 D_{0L}^{\alpha_L} = 0, \qquad (2)$$

где η_1 и η_2 – некоторые технические параметры, $0 < \alpha_K, \alpha_L < 1$. Решение такой задачи можно записать с помощью функции типа Миттаг-Леффлера:

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}E_{\alpha_K,\alpha_K}(\lambda_K K^{\alpha_K})E_{\alpha_L,\alpha_K}(\lambda_L K^{\alpha_L}),\, E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \tag{3}$$

где λ_K и λ_L – управляющие параметры, $A_0 > 0$ – произвольная константа. Если в (3) положить $\alpha_K + \alpha_L = 3$, $A = A_0/[\Gamma(\alpha_K)\Gamma(\alpha_L)]$, то мы получим функцию Кобба – Дугласа (1). Существуют и другие методики определенеия производственных функций [4].

С другой стороны ЕУП используется на непроизводственное потребление и инвестиции:

$$Y(t) = C(t) + I(t). \tag{4}$$

Инвестиции $I(t)$ также можно представить через ЕУП и коэффициент накопления η $I(t) = \eta Y(t)$, поэтому (4) можно записать $Y(t) = C(t) + \eta Y(t)$ и отсюда непроизводственные фонды можно найти из соотношения:

$$C(t) = Y(t)(1-\eta). \tag{5}$$

Рассмотрим изменение ресурсов $L(t)$ и $K(t)$ в моменты времени t. В работе [1] изменение трудовых ресурсов $L(t)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dL(t)}{dt} = aL,\, L(0) = L_0, \tag{6}$$

где L_0 – начальные трудовые ресурсы. В работе [5] изменение трудовых ресурсов происходит по логистическому закону:

$$\frac{dL(t)}{dt} = [a - \varepsilon L(t)]L(t),\, L(0) = L_0,\, \varepsilon \geq 0. \tag{7}$$

В работе мы будем предполагать, что прирост трудовых ресурсов будет происходить по другому закону:

$$\partial_{0t}^{\alpha_K} L(\tau) = aL,\, L(0) = L_0, \tag{8}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha_L} L(\tau) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha_L)}\displaystyle\int_0^t \frac{L'(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha_L}}$ – оператор дробной производной порядка α_L в смысле Герасимова – Капуто [5]. Уравнение (8) считается нелокальным за счет степенного ядра в операторе дробного дифференцирования. Запасы капиатала $K(t)$ изменяются за счет инвестиций и выбытия капиталов (амортизации). В работе [1] запасы $K(t)$ описываются дифференциальным уравнением:

$$\frac{dK(t)}{dt} = \eta Y(t) - bK(t),\, K(0) = K_0, \tag{9}$$

где K_0 – начальные запасы капитала. Мы обобщим закон (9), следуя уравнению (8)

$$\partial_{0t}^{\alpha_K} K(t) = \eta Y(t) - bK(t),\, K(0) = K_0,\, 0 < \alpha_K < 1. \tag{10}$$

Надо отметить, что при $\alpha_K = \alpha_L = 1$ мы получим соотношения (6) и (9). Нелокальная модель Солоу с учетом соотношений (5), (8), (9) может быть записана так:

$$\begin{cases} Y(t) = F(K(t), L(t)), \\ C(t) = Y(t)(1-\eta), \\ \partial_{0t}^{\alpha_K} L(\tau) = aL,\, L(0) = L_0, \\ \partial_{0t}^{\alpha_K} K(t) = \eta Y(t) - bK(t),\, K(0) = K_0,\, 0 < \alpha_K < 1. \end{cases} \tag{11}$$

Решение задачи

Последние два уравнения имеют решения [6]:

$$L(t) = L_0 E_{\alpha_L,1}\left(at^{\alpha_L}\right),$$

$$K(t) = K_0 E_{\alpha_K,1}\left(-bt^{\alpha_K}\right) + \eta \int_0^t Y(\tau)(t-\tau)^{\alpha_K-1} E_{\alpha_K,\alpha_K}\left(-b(t-\tau)^{\alpha_K}\right) d\tau.$$

Введем в рассмотрение величину $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ – капиталовооруженность. Тогда капиталовооруженность перепишем в виде:

$$k(t) = k_0 \frac{E_{\alpha_K,1}\left(-bt^{\alpha_K}\right)}{E_{\alpha_L,1}\left(at^{\alpha_L}\right)} + \frac{\eta}{E_{\alpha_L,1}\left(at^{\alpha_L}\right)} \int_0^t Y(\tau)(t-\tau)^{\alpha_K-1} E_{\alpha_K,\alpha_K}\left(-b(t-\tau)^{\alpha_K}\right) d\tau, \quad (12)$$

где $k_0 = \frac{K_0}{L_0}$. Функция $E_{\alpha_L,1}\left(at^{\alpha_L}\right)$ не имеет вещественных нулей [3], поэтому ограничений в (12) на t нет. Рассмотрим производственную функцию Кобба – Дугласа (1), подставим ее в решение (12) с учетом ее однородности, получим:

$$k(t) = k_0 \frac{E_{\alpha_K,1}\left(-bt^{\alpha_K}\right)}{E_{\alpha_L,1}\left(at^{\alpha_L}\right)} + \quad (13)$$

$$+ \frac{\eta A}{E_{\alpha_L,1}\left(at^{\alpha_L}\right)} \int_0^t k^{\gamma}(\tau)(t-\tau)^{\alpha_K-1} E_{\alpha_L,1}\left(a\tau^{\alpha_L}\right) E_{\alpha_K,\alpha_K}\left(-b(t-\tau)^{\alpha_K}\right) d\tau.$$

Уравнение (13) является нелинейным уравнением Вольтерра второго рода, его можно решить методом квадратур [7].

Необходимо отметить, что при значении парметров $\alpha_K = \alpha_L = 1$ решение (13) переходит в известное решение [1]:

$$k(t) = \left[\frac{\eta A}{b+a} + \left(k_0^{1-\gamma} - \frac{\eta A}{b+a}\right) e^{-(b+a)(1-\gamma)t}\right]^{1/(1-\gamma)}.$$

Заключение

Решение (13) описывает поведение макроэкономических показателей экономической ситемы. Параметризация модели Солоу обобщает ранее известные результаты и содержит новые результаты, которые необходимо изучить отдельною и дать им соответсвующую экономическую интерпретацию.

Библиографический список

1. Волгина О.А., Голодная Н.Ю., Одияко Н.Н., Шуман Г.И. Математическое моделирование экономических процессов и систем. М.: Кнорус, 2011. 200 с

2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

4. Терехов Л.Л. Производственные функции. М.: Статистика, 1974. 113 с.

5. Нахушева З.А. Об одной односекторной макроэкономической модели долгосрочного прогнозирования // Доклады АМАН. 2012. Т. 14. №1. С. 124–127.

6. Паровик Р.И. Решение нелокального уравнения аномальной диффузии-адвекции радона в системе грунт-атмосфера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 1 (2). С. 37-44.

7. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

8. Полянин А.А., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 608 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 14.11.2012