А. П. Горюшкин, Особенности машинного исследования дискретных групп, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2013, выпуск 1(6), 43–55

DOI: http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2013-6-1-43-55

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2013. № 1(6). C. 43-55. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2013-6-1-43-55

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 512.24

ОСОБЕННОСТИ МАШИННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ГРУПП

А.П. Горюшкин[1,2]

[1] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
[2] Филиал Дальневосточного Федерального государственного университета, 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1
E-mail: as2021@mail.ru

В статье демонстрируются особенности машинного исследования внутреннего строения конечных и бесконечных дискретных групп.

Ключевые слова: группа, подгруппа, порядок подгруппы, свободное произведение

INFORMATION AND COPMPUTATION TECHNOLOGIES

MSC 18A32

ON SUBGROUPS OF ALMOST AMALGAMATED FREE PRODUCT TWO GROUPS WITH FINITE AMALGAMATED SUBGROUP

A.P. Goryushkin[1,2]

[1] Kamchatka State University by Vitus Bering, 683032, Petropavlovsk Kamchatskiy, Pogranichnaya st, 4, Russia
[2] Branch of the Far Eastern Federal State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Tushkanova st., 11/1
E-mail: as2021@mail.ru

The article demonstrates the features of the machine study of the internal structure of finite and infinite discrete groups.

Key words: group, subgroup, the order of the subgroup, free product

Введение

Многие важные для приложений группы порождаются всего лишь двумя элементами. В случае конечности таких групп в отдельных случаях удается использовать при их изучении компьютерную технику.

При исследовании же бесконечных дискретных групп, порожденных двумя элементами, иногда можно использовать свойства свободного произведения групп с объединенной подгруппой. Строение некоторых дискретных групп такого вида обсуждаются в [1] и [2]. В этих работах результаты получены «вручную» без помощи вычислительной техники. Здесь эти результаты проверяются с помощью машинных вычислений и благодаря этому получают некоторые уточнения и обобщения. Кроме того, с помощью техники удается частично ответить на один вопрос из [3].

Группы G_p с представлением $< a,\ b;\ a^2{=}b^p{=}\ (ab)^3{=}\ (b^r ab^{-2r}a)^2{=}\ 1 >$

Рассмотрим 2-порожденные группы

$$G_p =< a,\ b;\ a^2 = b^p = (ab)^3 = (b^r ab^{-2r}a)^2 = 1 >,$$

где $r^2 + 1 \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$. Существование числа r такого, что $r^2 + 1 \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ для нечетного простого p означает, что $p \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$, и, следовательно, $p \in \{2,\ 5,\ 13,\ 17,\ 29,\ \dots\ \}$.

Для первых двух значений чисел p исследовать группы G_p легко и «вручную». Для $p = 2$ число $r = 1$, и таким образом:

$$G_2 =< a,\ b;\ a^2 = b^2 = (ab)^3 = (bab^{-2}a)^2 = 1 > .$$

Соотношение $(bab^{-2}a)^2 = 1$ в этой группе превращается в тривиальное. Таким образом:

$$G_2 =< a,\ b;\ a^2 = b^2 = (ab)^3 = 1 > .$$

Однако для демонстрации возможностей техники покажем, что последнее соотношение следует из первых трех, просто вычислив порядок группы до и после удаления из представления этого соотношения. При машинном исследовании группы будем использовать пакет символьных математических вычислений *Maple*:

```
> with(group):
> G2: = grelgroup({a, b}, {[a, a], [b, b], [a, b, a, b, a, b], [b, a, 1/b, 1/b, a, b, a, 1/b, 1/b, a]}):
> grouporder(G2);
```

6

```
> G20: = grelgroup({a, b}, {[a, a], [b, b], [a, b, a, b, a, b]}); > grouporder(G20);
```

6

Порядок не изменился, поэтому группа задается не четырьмя, а тремя соотношениями, и порядок этой группы равен шести.

Дальнейшие рассуждения излишни: полученное представление принадлежит симметрической группе S_3.

Впрочем, можно убедиться в этом и явно, используя лишь тот факт, что S_3 порождается двумя транспозициями. Представим группу G_2 подстановками правых смежных классов по подгруппе, порожденной элементом a, и в результате получим изоморфную копию группы G_2. Эта копия является группой S_3:

> H := subgrel({y = [a]}, G2):
> P2:=permrep(H);
> grouporder(P2);

$P2$:= permgroup(3, {a = [[2, 3]], b = [[1, 2]]})

$$6$$

Группа G_2 исследована.

Группа G_5 имеет копредставление:

$$G_5 =< a,\ b;\ a^2 = b^5 = (ab)^3 = (b^2ab^{-4}a)^2 = 1 > .$$

Снова покажем сначала, что последнее определяющее соотношение следует из трех первых. Сейчас это уже не так очевидно, как для группы G_2, но с помощью техники устанавливается так же легко:

> with(group):
> G5: = grelgroup({a, b}, {[a, a], [b$5], [a, b, a, b, a, b], [b$2, a, 1/b$4, a, b$2, a, 1/ b$4,a]}):
> grouporder(G5);

$$60$$

> G50: = grelgroup({a, b}, {[a, a], [b$5], [a, b, a, b, a, b]}): grouporder(G50);

$$60$$

Порядок группы после удаления последнего соотношения не изменился, а это и означает, что последнее четвертое является следствием первых трех. Таким образом:

$$G_5 =< a,\ b;\ a^2 = b^5 = (ab)^3 > .$$

Покажем, что группа G_5 изоморфна знакопеременной группе A_5 .

Рассмотрим подгруппу H в A_5, порожденную двумя подстановками:

$$a\ =\ (1\ 2)(3\ 4); b\ = (1\ 2\ 3\ 4\ 5).$$

Хотя это несложно и «вручную», элемент $ab = (1\ 3\ 5)$ вычислим на компьютере. Заодно найдем порядок группы, порождённой элементами a, b:

> H: = permgroup(5, {a = [[1, 2], [3, 4]], b = [[1, 2, 3, 4, 5]]});
> convert([a,b],'disjcyc',H);

$$[[1,3,5]]$$

> grouporder(H);

$$H\ =\ permgroup(5,\{a\ =\ [[1,2],\ [3,4]], b\ =\ [[1,2,3,4,5]]\})$$

60

Итак, подгруппа H группы A_5 совпадает со всей группой A_5. Кроме того, определяющие соотношения группы G_5 выполняются в группе H. Это значит, что H – гомоморфный образ группы G_5. Однако обе эти группы состоят из одинакового числа элементов, и, следовательно, гомоморфизм является изоморфизмом.

Таким образом, G_5 изоморфна A_5. Устройство этой группы тоже несложно; группа G_5 проста.

Для $p = 13$ параметр $r = \pm 5$, и группа G_{13} имеет копредставление:

$$G_{13} =< a,\ b;\ a^2 = b^{13} = (ab)^3 = (b^5ab^{-10}a)^2 = 1 > .$$

Сначала вычислим порядок группы G_{13}:

> with(group):

> G13: = grelgroup({a, b}, {[a, a], [b$13], [a, b, a, b, a, b], [b$5, a, 1/b$10, a, b$5, a, 1/b$10, a]});

> grouporder(G13):

1092

Для дальнейшего исследования эту группу придется представить подстановками.

В группе G_{13} возьмем подгруппу H, порожденную элементом $aba^{-1}b^{-1}ab$. Подгруппа H не содержит неединичных нормальных подгрупп группы G_{13}, индекс H в G_{13} равен 84. Таким образом, группу G_{13} можно изоморфно представить сдвигами правых смежных классов по H или, другими словами, подстановками 84-й степени:

> H : = subgrel({y = [a, b, 1/a, 1/b, a, b]}, G13):

> G: = permrep(H);

> grouporder(G);

G := permgroup(84 a = [[1, 2], [3, 4], [5, 32], [6, 55],

[7, 34], [8, 44], [9, 15], [10, 19], [11, 54], [12, 31], [13, 60],

[14, 33], [16, 18], [17, 81], [20, 53], [21, 67], [22, 29], [23, 73], [24, 80], [25, 26], [27, 40], [28, 66], [30, 72], [35, 71], [36, 38], [37, 79], [39, 70], [41, 61], [42, 46], [43, 56], [45, 62], [47, 57], [48, 50], [49, 82], [51, 58], [52, 68], [59, 69], [63, 65], [64, 84], [74, 75], [76, 83], [77, 78]],

b = [[1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 2, 3], [15, 62, 61, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16], [26, 27, 28, 29, 30, 31, 39, 38, 37, 36, 35, 34, 77], [32, 33, 69, 68, 67, 66, 65, 64, 63, 40, 41, 42, 43], [44, 71, 70, 54, 53, 52, 51, 50, 49, 48, 47, 46, 45], [55, 56, 57, 58, 59, 60, 72, 73, 74, 76, 75, 80, 8]]).

1092

Покажем, что группа G_{13} тоже проста. Возможности техники позволяют просто перебрать все ее элементы и проверить, как выглядят нормальные замыкания для каждого элемента. Если окажется, что нормальное замыкание некоторого элемента является нетривиальным нормальным делителем, то исследуемая группа не проста.

Проще всего сделать такой перебор (с большим запасом прочности) случайным образом:

```
> for i from 1 to 10000 do if grouporder
(Normal Closure( permgroup (84, {RandElement(G)}), G))
< 1092 and grouporder (NormalClosure (permgroup(84, {RandElement(G)}),G))
> 1 then print( "G13 не проста") else fi od;
```

Работа программы заканчивается, а надпись «G13 не проста» так и не появилась. Это значит, что группа G_{13} проста.

Теперь пусть $p = 17$, тогда $r = \pm 4$. Копредставление G_{17} имеет вид:

$$G_{17} =< a,\ b;\ a^2 = b^{17} = (ab)^3 = (b^4 ab^{-8} a)^2 = 1 > .$$

Группа G_{17} содержит 2448 элементов, и ее можно изоморфно представить группой подстановок правых смежных классов по подгруппе $H = \text{гр}(aba)$:

```
> G17: = grelgroup({a, b}, {[a, a], [b$17], [a, b, a, b, a, b], [b$4, a, 1/b$8, a, b$4, a, 1/b$8, a]}); grouporder(G17);
```

2448

```
> grouporder(pres(subgrel({x=[a,b,a]}, G17)));
```

17

```
> H := subgrel({y=[a,b,a]},G17):
G:=permrep(H):grouporder(H);
```

2448

Отображение, переводящее элемент a из G_{17} в подстановку:

[[1, 2], [3, 4], [5, 47], [6, 49], [7, 19], [8, 33], [9, 62], [10, 46], [11, 32], [12, 28], [13, 84], [14, 123], [15, 36], [16, 27], [17, 54], [18, 48], [20, 103], [21, 106], [22, 24], [23, 139], [25, 105], [26, 37], [29, 31], [30, 140], [34, 115], [35, 124], [38, 104], [39, 56], [40, 78], [41, 42], [43, 111], [44, 134], [45, 129], [50, 95], [51, 121], [52, 117], [53, 96], [55, 79], [57, 58], [59, 69], [60, 76], [61, 83], [63, 128], [64, 101], [65, 136], [66, 131], [67, 92], [68, 88], [70, 71], [72, 99], [73, 75], [74, 138], [77, 82], [80, 81], [85, 86], [87, 98], [89, 91], [90, 142], [93, 130], [94, 109], [97, 116], [100, 137], [102, 122], [107, 108], [110, 133], [112, 113], [114, 143], [118, 120], [119, 144], [125, 127], [126, 141], [132, 135]],

а элемент b – в подстановку

[[1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 4], [19, 95, 102, 101, 100, 99, 98, 97, 96, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20], [28, 29, 30, 31, 32, 129, 132, 131, 130, 107, 106, 105, 104, 58, 59, 60, 61], [33, 103, 108, 109, 110, 111, 112, 114, 113, 41, 40, 39, 38, 37, 36, 35, 34], [42, 43, 44, 45, 46, 128, 122, 121, 120, 119, 118, 117, 116, 85, 84, 83, 82], [47, 48, 79, 78, 77, 76, 71, 72, 73, 74, 75, 137, 136, 135, 134, 133, 81], [49, 80, 94, 93, 92, 91, 90, 89, 88, 57, 56, 55, 54, 53, 52, 51, 50], [62, 115, 127, 126, 125, 124, 123, 86, 87, 70, 69, 68, 67, 66, 65, 64, 63]], реализует этот изоморфизм.

Точно таким же приемом, как и для группы G_{13}, можно установить простоту G_{17}.

При $p = 29$ параметр $r \pm 12$, и

$$G_{29} =< a,\ b;\ a^2 = b^{29} = (ab)^3 = (b^{12}ab^{-24}a)^2 = 1 > .$$

Введем новый порождающий элемент $c = ab$. Тогда копредставление группы G_{29} принимает вид:

$$G_{29} =< a,\ c;\ a^2 = 1,\ c^3 = 1,\ (a^{-1}c)^{29} = 1,\ (ca^{-1})^{11}(ac^{-1})^{24}a(ca^{-1})^{12}c(ac^{-1})^{24}a = 1 > .$$

Таким образом, группа G_{29} является фактор-группой свободного произведения

$$G =< a; a^2 = 1 > * < c : c^3 = 1 >$$

двух циклических групп порядков 2 и 3, факторизуемого по нормальному замыканию элементов:

$$r = (a^{-1}c)^{29};\ q = (ca^{-1})^{11}(ac^{-1})^{24}a(ca^{1})^{12}c(ac^{-1})^{24}.$$

Для симметризированного множества R, состоящего из циклических перестановок слов r, q, r^{-1}, q^{-1}, в группе G выполняется условие $C'\left(\frac{1}{6}\right)$; поэтому каждый неединичный элемент из нормального замыкания множества $N =< r,q >^G$ в группе G содержит в качестве внутреннего сегмента левую половину некоторого элемента из R.

Это означает, в частности, что N имеет единичное пересечение с подгруппой гр(cac), порожденной элементом cac бесконечного порядка. Отсюда следует, что фактор-группа ${}^{G}\!/_{N} = G_{29}$ бесконечна.

О группах $G(n)$ с представлением $<a,\ b;\ a^n = 1, ab = b^3a^3>$

Группа $G(2)$ имеет копредставление:

$$G(n) =< a,\ b;\ a^2 = 1, ab\ = b^3a^3 >=< a,\ b;\ a^2 = 1, aba^{-1} = b^3 > .$$

Найдем порядок группы $G(2)$ и представим ее группой подстановок правых смежных классов по подгруппе, порожденной элементом a:

```
> with(group):
G1 := grelgroup({a,b}, {[a$2],[a,b,1/a,1/a,1/a,1/b,1/b,1/b]}): grouporder(G1);
```

16

```
> H := subgrel({y=[a]},G1):
GP:=permrep(H);
```

$$GP := \mathrm{permgroup}(8, \{a = [[2, 3], [4, 6], [7, 8]],$$

$$b = [[1, 2, 4, 3, 5, 7, 6, 8]]\})$$

```
> grouporder(GP);
```

16

> GP := permgroup(8,{[[2, 3], [4, 6], [7, 8]], [[1, 2, 4, 3, 5, 7, 6, 8]]}):
> isabelian(GP);

$$false$$

> H:=permgroup(8,{[[2, 3], [4, 6], [7, 8]]})ˆ
> isnormal(GP,H);

$$false$$

> grouporder(derived(GP));

$$4$$

Итак, группа полупрямым произведение циклической группы порядка 2 и циклической порядка 8. Отметим, что попутно найден порядок и индекс коммутанта группы $G(2)$.

Группа $G(3)$, имеет копредставление:

$$G(3) =< a,\ b;\ a^3 = 1, ab\ = b^3a^3 > .$$

Это копредставление легко преобразовать, не обращаясь за помощью к вычислительной технике:

$$G(3) =< a,\ b;\ a^3 = 1, ab\ = b^3 >=< a,\ b;\ a^3 = 1, a = b^2 >=< b;\ b^6 = 1 > .$$

Группа $G(3)$ оказалась циклической порядка шесть.

Компьютерные вычисления это подтверждают:
> with(group):
> G3 := grelgroup({a, b}, {[a$3], [a, b, 1/a, 1/a, 1/a, 1/b, 1/b, 1/b]}):
> E := subgrel({x = [ ]},G3):
> PG3:=permrep(E);
> grouporder(PG3);

$$6$$

$$PG3 := \text{permgroup}(6,\ \{a = [[1, 2, 3], [4, 6, 5]],\ b = [[1, 5, 2, 4, 3, 6]]\})$$

Подстановка b имеет шестой порядок в группе из шести элементов, а это и означает, что группа эта циклическая.

При $n = 4$ получаем копредставление:

$$G(4) =< a,\ b;\ a^4 = 1, ab\ = b^3a^3 > .$$

При машинном вычислении порядка группы $G(4)$ компьютер после нескольких минут работы сообщает, что порядок группы «слишком большой».

Покажем, что в этом случае, когда машина бессильна, порядок группы действительно слишком большой – эта группа бесконечна.

Пусть $c = ab$, тогда $a = cb^{-1}$и a^{-1}=bc^{-1}, и группу

$$G(4) =< a,\ b;\ a^4 = 1, ab = b^3a^{-1} >$$

можно представить в виде:

$$G(4) =< a,\ b,c;\ a^4 = 1, a = cb^{-1}, c = b^3bc^{-1} > .$$

Иначе говоря, представление G(4) принимает вид:

$$G(4) =<\ b,c;\ (bc^{-1})^4 = 1, c^2 = b^4 > .$$

Это значит, что $G(4)$ является фактор-группой свободного произведения G двух бесконечных циклических групп с объединенной подгруппой,

$$G =<\ b,c;\ c^2 = b^4 > .$$

Фактор-группа G_1 группы G по нормальному замыканию элемента c^2 является свободным произведением

$$G =<\ b,c;\ b^4 = 1, c^2 = 1 >$$

двух циклических групп. Сама же группа $G(4)$ – это фактор-группа группы G по нормальному замыканию N элемента $r = (bc^{-1})^4$. Для симметризованного множества R, состоящего из циклических перестановок слов r и r^{-1}, в группе G выполняется условие $C'\left(\frac{1}{6}\right)$, поэтому каждый неединичный элемент из нормального замыкания множества N в группе G содержит в качестве внутреннего сегмента левую половину некоторого элемента из R.

Ни один из элементов подгруппы H, порожденной элементом b^2c, не содержит в качестве внутреннего сегмента левой половины элемента из R. Следовательно, пересечение H и N единично. Однако элемент b^2c имеет бесконечный порядок, и, следовательно, фактор-группа ${}^{G}\!/_{N} = G(4)$ бесконечна.

Переходим к следующей группе такого вида; $n = 5$. Группа

$$G(5) =< a,\ b;\ a^5 = 1, ab = b^3a^3 >$$

конечна, и ее порядок можно вычислить машинным способом, но вычисление это будет небыстрое.

Кроме того, наша цель – исследовать и внутреннее строение этой группы. Поэтому и для ускорения машинных вычислений, и для исследования внутреннего строения группы проведем предварительные преобразования.

Введем в группе $G(5)$ еще один вспомогательный порождающий элемент $c = (ab)^2$. Тогда

$$G(5) =< a,\ b,\ c;\ a^5 = 1, ab = b^3a^3, c = (ab)^2 > .$$

Из этих соотношений следует, что $b^{10} = 1$ и $^{11} = 1$; и, кроме того, $bcb^{-1} = c^5$.

Последнее соотношение означает, что подгруппа C нормальна в $G(5)$. Так как

$$aba^{-1}b^{-1} = c^{-2},$$

подгруппа $C =$ гр(c) содержится в коммутанте K группы $G(5)$. Из того, что фактор-группа

$$< a,\ b,\ c;\ a^5 = 1, ab = b^3a^3, c = (ab)^2, b^{10} = 1, ^{11} = 1, aca^{-1} = c^9, bcb^{-1} = c^5, c = 1 >$$

группы

$$< a,\ b,\ c;\ a^5 = 1, ab = b^3a^3, c = (ab)^2, b^{10} = 1, ^{11} = 1, aca^{-1} = c^9, bcb^{-1} = c^5 > --$$

абелева, тогда следует обратное включение: $C \supseteq K$.

Итак, коммутант K совпадает с подгруппой C, порядка 11, а факто-ргруппа по коммутанту имеет порядок 10. Следовательно, порядок группы $G(5)$ равен 110.

Посмотрим, как с этой задачей справится вычислительная техника:

> G5: = grelgroup({a, b, c},{[a$5], [a, b, 1/a, 1/a, 1/a, 1/b, 1/b, 1/b], [1/c, a,b, a, b]}):

> grouporder(G5);

110

> A := subgrel({x=[1/a, b, c, 1/b, c, b, c]}, G5):

>A:= pres(A);

> grouporder(A);

$$A := \text{grelgroup}(\{x\}, \{[x, x, x, x, x, x, x, x, x, x]\})$$

10

> A := subgrel({b = [b], c = [c]}, G5):

> A: = pres(A);

> grouporder(A);

110

Представим группу $G(5)$ подстановками, заодно проверим её на абелевость и вычислим коммутант:

> H:= subgrel({y = [c, b, b]},G5):

PG5:= permrep(H);grouporder(PG5);

PG5 := permgroup(22, {b = [[1, 4, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 2, 3], [5, 6], [7, 18, 10, 19, 11, 22, 17, 20, 9, 21]], c = [[1, 2, 13, 17, 15, 6, 7, 8, 9, 10, 11], [3, 18, 4, 5, 22, 16, 19, 20, 21, 14, 12]]})

> PG5 := permgroup(22, { [[1, 4, 8, 12, 13, 14, 15, 16, 2, 3], [5, 6], [7, 18, 10, 19, 11, 22, 17, 20, 9, 21]], [1, 2, 13, 17, 15, 6, 7, 8, 9, 10, 11], [3, 18, 4, 5, 22, 16, 19, 20, 21, 14, 12]]})

> isabelian(PG5);

$false$

> K:=derived(PG5):

> grouporder(K):

11

$$K1 := \mathrm{permgroup}(22, \{[\ \ ]\})$$

> K1:=derived(K);

Теперь становится ясно, что группа $G(5)$ порождается элементами b, c и ее можно представить в виде:

$$G(5) =<\ b,\ c;\ b^{10} = 1, ^{11} = 1, bcb^{-1} = c^5 > .$$

Отсюда следует, что группа $G(5)$ является полупрямым произведением циклических групп:

$$C =< c;\ ^{11} = 1 >;\ B =<\ b;\ b^{10} = 1 >,$$

причем первая нормальна в $G(5)$, а вторая нет.

Переходим к исследованию группы $G(6)$. С помощью компьютера вычислим порядок этой группы:

> G6:=grelgroup({a, b}, {[a$6], [a, b, 1/a, 1/a, 1/a, 1/b, 1/b, 1/b]});

$$G6 := \mathrm{grelgroup}\left(\{a, b\}, \{[a, a, a, a, a, a], \left[a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right]\}\right)$$

> grouporder(G6);

$$9072$$

Введем новый порождающий $c = ab$. Группу с новым порождающим обозначим тем же символом $G(6)$.

Найдем порядки элементов a, b, c в группе $G(6)$:

> G6: = grelgroup({a,b,c}, {[a$6], [1/c,a,b], [a, b, 1/a, 1/a, 1/a, 1/b, 1/b, 1/b]}):

> A := subgrel({a=[a]},G6):

> A:=pres(A);

$$A := grelgroup(\{a\}, \{[a, a, a, a, a, a]\})$$

> grouporder(A);

$$6$$

> B := subgrel({b=[b]},G6):

> B:=pres(B):

grouporder(B);

$$24$$

> C:= subgrel({c=[c]},G6):

C:=pres(C):

> grouporder(C);

$$84$$

$$GG := \mathrm{grelgroup}\Big(\{b, c\},$$

$$\Big\{\Big[c, b, \frac{1}{c}, b, \frac{1}{c}, b, \frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{b}, \frac{1}{b}\Big], \Big[c, \frac{1}{b}, c, \frac{1}{b}, c, \frac{1}{b}, c, \frac{1}{b}, c, \frac{1}{b}, c, \frac{1}{b}\Big]\Big\}\Big)$$

С помощью машины найдем представление нашей группы в порождающих b, c:

> G:= subgrel({c=[c], b=[b]},G6):

GG:= pres(GG);grouporder(GG);

$$9072$$

Подгруппа $C = \text{гр}(c)$ имеет индекс 108 в группе $G(6)$, но изоморфно представить $G(6)$ с помощью подгруппы C подстановками 108 степени не получится.

> H := subgrel({y = [c]}, G6):

> S0:=permrep(H):

> grouporder(S0);

$$432$$

Неточность представления означает, что в подгруппе C содержится нормальный делитель N группы $G(6)$, причем порядок N равен $\dfrac{9072}{432} = 21$. Другими словами, $N = \text{гр}(c^4)$.

Точное представление группы $G(6)$ подстановками получается с помощью подгруппы гр(b), имеющей индекс 378 в группе $G(6)$:

> B := subgrel({y = [b]}, G6):

> S1:= permrep(B);

> grouporder(S1);

$$9072$$

Ввиду сравнительно большого размера эти подстановки здесь не приводятся. Читатель сам может проверить эти вычисления. Для работы с группой $S1$ ее необходимо снова ввести в компьютер, предварительно убрав символы «$b \Longrightarrow$» и «$c \Longrightarrow$» в полученном представлении группы $S1$.

Дальнейшие вычисления имеют вид:

> isabelian(S1);

$$false$$

> DerivedS(S1):

> K:=derived(S1):

> grouporder(K);

$$756$$

> K1:=derived(K):

> grouporder(K1);

27

> K2:=derived(K1):
> grouporder(K2);

3

Итак, группа $G(6)$ – не абелева, но разрешима: порядок первого коммутанта равен 756, второго – 27, третьего – 3 (а четвертый коммутант, естественно, равен единице).

О группах $G(a, b)$ с представлением $< x,y;\ x= [x,\ {}_a y],\ y= [y_b x]>$

Следуя Р. Брандлу и Дж. С. Вильсону ([4]), обозначим $[x,\ {}_1 y] = [x, y]$ и $[x,\ {}_{n\,+\,1} y] = [[x,\ {}_n y], y]$.

Ряд проблем для групп $G(a, b)$ с представлением $< x, y;\ x = [x,\ {}_a y],\ y = [y,\ {}_b x] >$ до сих пор остается нерешенным.

В частности, нет ответа на следующий вопрос Рольфа Брандла (задача 11.18 из [3], процитированная и в [5]).

Пусть $G(a, b) = < x, y;\ x = [x,\ {}_a y],\ y = [y,\ {}_b x] >$. Конечна ли группа $G(a, b)$? Легко показать, что $G(1, b) = 1$, и можно показать, что $G(2, 2) = 1$. Ничего неизвестно про $G(2, 3)$.

Показать, что $G(1, b) = 1$ действительно очень легко. Из соотношения $x = xyx^{-1}y^{-1}$ следует $x = 1$, и поэтому при любом b имеем $y = 1$. Кстати, машинным способом можно проверить это рассуждение лишь для конкретных значений b.

Проверим теперь компьютерным способом, что группа $G(2, 2)$ тоже единичная. Неожиданно оказалось, что ответить на прямо поставленный вопрос, точнее команду «*grouporder*», машина затрудняется.

Однако представления для подгрупп гр(x) и гр(y) находит быстро:

G22:= grelgroup({x, y}, {[1/x, x, y, 1/x, 1/y, y, y, x, 1/y, 1/x, 1/y], [1/y, y, x, 1/y, 1/x, x, x, y, 1/x, 1/y, 1/ x]}):

$$G22 := \mathrm{grelgroup}\left(\{x, y\},\ \left\{\left[\frac{1}{x}, x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, y, y, x, \frac{1}{y}, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right], \left[\frac{1}{y}, y, x, \frac{1}{y}, \frac{1}{x}, x, x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right]\right\}\right)$$

> H1:= subgrel({x=[x]},G22): pres(H1);

grelgroup({x}, {[x]})

> H2:= subgrel({y=[y]},G22): pres(H2);

grelgroup({y}, {[y]})

Обе эти подгруппы единичны, поэтому и $G(2, 2) = 1$.

Теперь точно так же получим ответ на вопрос о $G(2, 3)$:

G23:= grelgroup({x, y}, {[1/x, x, y, 1/x, 1/y, y, y, x, 1/y, 1/x, 1/y, y, 1/x, 1/y, x, y, 1/y, 1/y, 1/x, y, x, y, 1/ y], [1/y, y, x, 1/y, 1/x, x, x, y, 1/x, 1/y, 1/x]});

> H1:= subgrel({x=[x]},G23): pres(H1);

$$G23 := \mathrm{grelgroup}\left(\{x, y\}, \left\{\left[\frac{1}{y}, y, x, \frac{1}{y}, \frac{1}{x}, x, x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right],\right.\right.$$
$$\left.\left.\left[\frac{1}{x}, x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, y, y, x, \frac{1}{y}, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, x, y, \frac{1}{y}, \frac{1}{y}, \frac{1}{x}, y, x, y, \frac{1}{y}\right]\right\}\right)$$

grelgroup({x}, {[x]})

> H2:= subgrel({y=[y]},G23): pres(H2);

grelgroup({y}, {[y]})

Таким образом, теперь про группу $G(2, 3)$ известно всё. Эта группа состоит из одного элемента.

Заключение

Конечно, можно и далее экспериментировать с наборами чисел a, b, но ответить на основной вопрос Брандла (всегда ли конечна группа G(a, b)?) с помощью машины, к сожалению, не удастся.

Библиографический список

1. Горюшкин А.П. О группах с представлением $< a, b; a^n=1, ab = b^3a^3 >$ // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2010. № 1. С. 8-11.

2. Горюшкин А.П., Горюшкин В.А. О некоторых свойствах 2-порожденных групп // Материалы региональной научно-практической конференции. Петропавловск-Камчатский, 2010. с. 17-19.

3. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 11-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990.

4. Brandl R., Wilson J. S. Characterization of Finite Soluble Groups by Laws in a Small Number of Variables // Journal of algebra. 1988. Vol. 116. P. 334-341.

5. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 17-е изд., доп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 11.03.2013