Р. И. Паровик, Модель субдиффузии радона во фрактальной пористой среде, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2013, выпуск 2(7), 46–51

DOI: http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2013-7-2-46-51

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2013. № 2(7). С. 46-51. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2013-7-2-46-51

УДК 517.955

МОДЕЛЬ СУБДИФФУЗИИ РАДОНА ВО ФРАКТАЛЬНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ *

Р.И. Паровик[1, 2]

[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, п. Паратунка, ул. Мирная, 7
[2] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: romanparovik@gmail.com

Рассмотрена модель субдиффузии радона без адвекции. С помощью функции Грина найдено решение модели. Показано,что оно является обобщением ранее известного классического решения.

Ключевые слова: функция Грина, обобщенная функция Райта, функция типа Миттаг-Леффлера

MSC 35C05

MODEL SUBDIFFUSION RADON IN FRACTAL POROUS MEDIUM

R.I. Parovik[1, 2]

[1] Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia
[2] Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky,
Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: romanparovik@gmail.com

We consider a model of subdiffusion radon without advection. With the help of the Green's function found a solution model. It is shown that it is a generalization of the previously known classical solutions.

Key words: Green function, generalized function Wright, function of Mittag-Leffler

*Работа выполнена в рамках проекта №12-I-ОФН-16 «Фундаментальные проблемы воздействия мощными радиоволнами на атмосферу и плазмосферу Земли» и при поддержке Министерства образования и науки РФ по программе стратегического развития ФГБОУ ВПО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга» на 2012-2016 гг.

Введение

Радон – радиоактивный газ, находящейся постоянно в геосреде и эманирующий в приземный слой атмосферы с разной интенсивностью в зависимости от деформационных возмущений и других факторов. Изучение радона как предвестника землетрясений официально началось в 1966 г. после сильного апрельского землетрясения в г. Ташкенте с M=5,2. Именно тогда были успешно спрогнозированы автершоки этого события по концентрации радона в грунтовых водах. Вследствие, чего в дальнейшем выросла практическая значимость математического моделирования процесса переноса радона.

В этой работе мы рассмотрим режим массопереноса радона в пористой фрактальной среде – режим субдиффузии. Субдиффузия радона – процесс диффузии радона во фрактальной пористой среде, который протекает медленнее обычного режима диффузии. Это обусловлено тем, что геосреда обладает сложной топологией каналов между порами. Каналы изгибаются, сильно изрезаны, а в некоторых случаях могут разрываться, например, в силу наряжено-деформированного состояния геосреды, поэтому процесс переноса радона замедляется.

Режим субдиффузии характеризуется дробным показателем β, который входит в уравнение диффузии как порядок дробной производной по времени. В работе [1] этот показатель соответствует доле каналов, открытых для протекания вещества. Такой процесс обычно называют нелокальным по времени, а фрактальную среду, в которой он происходит, средой с памятью. В этом работе мы рассмотрим режим субдиффузии радон с позиции математического моделирования.

Постановка задачи и методика ее решения

Будем искать объемную активность радона $A(\eta,\theta)$ в области

$$\Omega = \{-\infty < \eta < \infty, \theta > 0\},$$

а также считать, что перенос радона осуществляется только с помощью диффузии. Уравнение переноса радона можно записать так:

$$\frac{\partial^{\beta} A(\eta,\theta)}{\partial \theta^{\beta}} = \bar{D}_e \frac{\partial^2 A(\eta,\theta)}{\partial \eta^2} - \bar{\lambda}\left(A(\eta,\theta) - A_{\infty}\right). \tag{1}$$

Здесь $\bar{D}_e$ - коэффициент диффузии, $\bar{\lambda}$ - постоянная распада радона, A_{∞}- равновесное значение объемной активности на некоторой глубине, производная порядка $0 < \beta < 1$ понимается в смысле Герасимова-Капуто и определяется следующим образом:

$$\frac{\partial^{\beta} A(\eta,\theta)}{\partial t^{\beta}} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int\limits_0^t \frac{\partial A(\eta,\zeta)}{\partial \zeta} (t-\zeta)^{-\beta} d\zeta.$$

Для уравнения (1) известны граничные и начальные условия:

$$A(0,\theta) = 0, \lim_{\eta \to -\infty} A(\eta,\theta) = A_{\infty}, A(\eta,0) = \phi(\eta) \tag{2}$$

Решим задачу (1)-(2) методом функции Грина. Для этого найдем функцию Грина из следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^{\beta} G_{2,\beta}(\eta,\theta)}{\partial\theta^{\beta}} - \bar{D}_e \frac{\partial^2 G_{2,\beta}(\eta,\theta)}{\partial\eta^2} + \bar{\lambda} G_{2,\beta}(\eta,\theta) = 0 \tag{3}$$

$$G_{2,\beta}(\eta,0) = \delta(\eta)$$

Здесь $\delta(\eta)$ – функции Дирака. Сделаем преобразование Лапласа по θ и косинус-преобразование Фурье по η уравнение (1). Получим следующее уравнение для трансформанты с учетом, что $F[\delta(\eta)(k)] = 1$:

$$\tilde{G}_{2,\beta}(k,p) = \frac{1}{p^{\beta} + \bar{D}_e k^2 + \bar{\lambda}} = \frac{1}{p^{\beta} + \left(\bar{D}_e k^2 + \bar{\lambda}\right)} \tag{4}$$

Для изображения (4) известно [2], что обратное преобразование Лапласа по p дает:

$$G_{2,\beta}(k,\theta) = L^{-1}\left[\frac{1}{p^{\beta} + \left(\bar{D}_e k^2 + \bar{\lambda}\right)}\right](\theta) = \theta^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(-\left[\bar{D}_e k^2 + \bar{\lambda}\right]\theta^{\beta}\right) \tag{5}$$

Здесь $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$ – функция типа Миттаг-Леффлера. Обратное преобразование Фурье для формулы (5) по k дает следующий результат:

$$G_{2,\beta}(\eta,\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \theta^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(\left[\bar{D}_e k^2 - \bar{\lambda}\right]\theta^{\beta}\right)\cos(k\eta)\,dk \tag{6}$$

Теорема. *Функция Грина (6) при значении параметра $\beta = 1$ переходит в функцию $G_{2,1}(\eta,\theta) = \dfrac{e^{-\lambda\theta - \frac{\eta^2}{4t\bar{D}_e}}}{2\sqrt{\pi\bar{D}_e t}}$.*

Доказательство. Доказательство. Пусть в (6) $\beta = 1$, будем иметь:

$$G_{2,1}(\eta,\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} E_{1,1}\left(\left[\bar{D}_e k^2 - \bar{\lambda}\right]\theta\right)\cos(k\eta)\,dk = \tag{7}$$

$$G_{2,1}(\eta,\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \exp\left(\left[\bar{D}_e k^2 - \bar{\lambda}\right]\theta\right)\cos(k\eta)\,dk.$$

Интеграл в формуле (7) можно вычислить по справочнику [3] его значение совпадает с функцией Грина для классического уравнения диффузии:

$$G_{2,1}(\eta,\theta) = \frac{\exp\left(-\bar{\lambda}\theta - \dfrac{\eta^2}{4t\bar{D}_e}\right)}{2\sqrt{\pi\bar{D}_e t}}. \tag{8}$$

□

Отметим, что согласно справочнику [4] функция 8 является фундаментальным решением одномерного нестационарного уравнения диффузии с поглощением вещества.

Обобщение функции Грина на случай супердиффузии с дробным показателем $1 < \alpha < 2$ дается следующей формулой:

$$G_{\alpha,\beta}(\eta,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \theta^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(\left[\bar{D}_e|k|^\alpha - \bar{\lambda}\right]\theta^\beta\right)\cos(k\eta)\,dk.$$

В работах [5]-[6] была найдена функция Грина в виде специальной функции Стокса в случае, когда в уравнении (1) $\bar{\lambda} = 0$. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^\beta A(\eta,\theta)}{\partial\theta^\beta} - \bar{D}_e\frac{\partial^2 A(\eta,\theta)}{\partial\eta^2} + \bar{\lambda}A(\eta,\theta) = 0, \tag{9}$$

$$A(\eta,0) = \phi(\eta), \quad \lim_{\eta\to\pm\infty} A(\eta,\theta) = 0.$$

Согласно теореме о свертке двух функций, решение задачи (9) можно записать следующим образом:

$$A(\eta,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)\,G_{2,\beta}(\eta-\xi,\theta)d\xi.$$

Если в правой части уравнения (9) имеется функция источника $F(\eta,\theta)$, тогда решение задачи Коши имеет вид:

$$A(\eta,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)\,G_\beta(\eta-\xi,\theta)d\xi + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi,\tau)\,G_\beta(\eta-\xi,\theta-\tau)d\tau d\xi.$$

Рассмотрим более общую задачу Коши:

$$\frac{\partial^\beta G_{\alpha,\beta}(\eta,\theta)}{\partial\theta^\beta} - \bar{D}_e\frac{\partial^{2\alpha} G_{\alpha,\beta}(\eta,\theta)}{\partial\eta^{2\alpha}} + \bar{\lambda}G_{\alpha,\beta}(\eta,\theta) = 0, 1 < 2\alpha < 2, \tag{10}$$

$$G_{\alpha,\beta}(\eta,0) = \delta(\eta).$$

Можно отметить, что при значении $\alpha = 1$ задача (10) переходит в задачу (3). Применяя преобразование Фурье по θ и Лапласа по η, получим соотношение для трансформанты:

$$\tilde{G}_{\alpha,\beta}(k,p) = \frac{1}{p^\beta + \Lambda + \bar{\lambda}},\ \Lambda = -\bar{D}_e|k|^{2\alpha}.$$

Это уравнение можно записать следующим образом:

$$\tilde{G}_{\alpha,\beta}(k,p) = \frac{1}{p^\beta + \Lambda + \bar{\lambda}} = \frac{1}{p^\beta + \bar{\lambda}}\frac{1}{\left(1 + \dfrac{\Lambda}{p^\beta + \bar{\lambda}}\right)}.$$

В силу выполнения условия $\left|\dfrac{\Lambda}{p^\beta + \bar{\lambda}}\right| < 1$ имеем сумму убывающей геометрической погрешности вида:

$$\tilde{G}_{\alpha,\beta}(k,p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\Lambda)^n}{\left(p^\beta + \bar{\lambda}\right)^{n+1}}.$$

Обратное преобразование Лапласа согласно соотношению:

$$L^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p^{\alpha}+\bar{\lambda}\right)^{n+1}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{\beta n+\beta-1}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}}\right)^{n}E_{\beta,\beta}\left(-\bar{\lambda}\theta^{\beta}\right)}{n!},$$

приводит к следующему результату:

$$\tilde{G}_{\alpha,\beta}(k,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\Lambda)^{n}\theta^{\beta n+\beta-1}}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}}\right)^{n}E_{\beta,\beta}\left(-\bar{\lambda}\theta^{\beta}\right).$$

Из литературы известно [7], что

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}}\right)^{n}E_{\beta,\beta}\left(-\bar{\lambda}\theta^{\beta}\right)={}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\(\beta n+\beta,\beta)\end{array}\middle|-\bar{\lambda}\theta^{\beta}\right],$$

где ${}_1\Psi_1(\eta)={}_1\Psi_1\left|\begin{array}{c}(\sigma,\alpha)\\(\mu,\beta)\end{array}\middle|\eta\right|=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\eta^{k}\Gamma(\sigma+\alpha k)}{k!\Gamma(\mu+\beta k)}$ – обобщенная функция Райта. Поэтому можно трансформанту можно записать так

$$\tilde{G}_{\alpha,\beta}(k,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\Lambda)^{n}\theta^{\beta n+\beta-1}{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,n)\\(\beta n+\beta,\beta)\end{array}\middle|-\bar{\lambda}\theta^{\beta}\right]}{n!}.$$

Обратное преобразование Фурье дает:

$$G_{\alpha,\beta}(\eta,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^{\beta n+\beta-1}{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\(\beta n+\beta,\beta)\end{array}\middle|-\bar{\lambda}\theta^{\beta}\right]}{n!}F^{-1}\left[\left(\bar{D}_e|k|^{2\alpha}\right)^{n}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{D}_e^{n}\theta^{\beta n+\beta-1}|\eta|^{-2\alpha n-1}\sin(\alpha n\pi)\Gamma(2\alpha n+1)}{n!}{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\(\beta n+\beta,\beta)\end{array}\middle|-\bar{\lambda}\theta^{\beta}\right]= \quad (11)$$

$$=-\frac{\theta^{\beta-1}}{|\eta|\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{\bar{D}_e\theta^{\beta}}{\eta^{2\alpha}}\right)^{n}\sin(\alpha\pi n)\Gamma(2\alpha n+1)}{n!}{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(n+1,1)\\(\beta n+\beta,\beta)\end{array}\middle|-\bar{\lambda}\theta^{\beta}\right].$$

Можно показать, что функция Грина задачи (11) в случае, когда $\alpha=\beta=1$ переходит в известную функцию (7). Функция Грина $G_{\alpha,\beta}(\eta,\theta)$ является решением уравнения субдиффузии, но и также супердиффузии. В литературе два обычно режима объединяют понятием «аномальная диффузия» [8].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен режим субдиффузии радона. Найдена функция Грина для задачи Коши субдиффузии радона во фрактальной среде. Рассмотрены обобщения задачи переноса радона в режиме субдиффузии и супердиффузии.

Библиографический список

1. Nigmatullin R.R. The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // Phys. Status Solidi. B. 1986. V. 133. P. 425–430.

2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. 272 с.

3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. С. 800.

4. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. С. 576.

5. Паровик Р.И. Задача Коши для нелокального уравнения диффузии-адвекции радона во фрактальной среде // Вестник СамГТУ. Серия Физико-математические науки. 2010. №1(20). С. 127-132.

6. Паровик Р.И. Метод функции Грина для одного дифференциального равнения дробного порядка // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2010. №1(1). С.17-23.

7. Kilbas A.A., Srivastava H.M.,. Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations – Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 c.

8. Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук. 2003. Т. 173. № 8. С. 847–876.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 27.09.2013