И. А. Ильин, Д. С. Нощенко, А. С. Пережогин, Численные решения системы линейных уравнений с дробной степенью матрицы дифференциального оператора, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2013, выпуск 2(7), 7–11

DOI: http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2013-7-2-7-11

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2013. № 2(7). С. 7-11. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2013-7-2-7-11

МАТЕМАТИКА

УДК 519.622+519.633

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ СТЕПЕНЬЮ МАТРИЦЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА *

И.А. Ильин[1, 2], Д.С. Нощенко[2], А.С. Пережогин[1, 2]

[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

[2] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул.Пограничная д.4

E-mail: d72156@gmail.ru

В работе исследуются численные решения линейных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с дробной степенью разностного оператора. Показаны особенности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной степенью разностного оператора. Введено условие регуляризации для разностого аналога дробной степени оператора.

Ключевые слова: численный метод, оператор дробной степени.

MATHEMATICA

MSC 65L12

NUMERICAL SOLUTION OF A LINEAR SYSTEM WITH A FRACTIONAL POWER

I.A. Il'in[1, 2], D.S. Noshchenko[2], A.S. Perezhogin[1, 2]

[1] Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

[2] Kamchatka state university by Vitus Bering, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: d72156@gmail.ru

We investigate numerical solutions of linear ordinary and partial differential equations. Cauchy's problem for ordinary equations of first and second order are generalized with fractional power of finite operator. Condition of regularization for the difference operator analogue of a fractional power is represented.

Key words: fractional calculus, numerical method

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО "Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга" на 2012-2016 гг.

Введение

Математическое моделирование физических процессов выполняется с помощью дробного исчисления в тех случаях, когда физическая система обладает "памятью"[1]. Это означает, что значения искомой функции зависят от значений функции в предыдущие или следующие моменты времени. В связи с этим классические модели физических систем можно обобщить с помощью введения в рассмотрение дробной степени дифференциальных операторов, которые приставлют собой свертку со степенний функцией. Предполагается, что подобное математическое описание наиболее точно описывает физические процессы, которые происходят во фрактальных средах.

В настоящей работе рассматриваются простейшие примеры обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых вычислительная схема имеет в качестве оператора дробную степень матрицы. Коэффициенты матрицы согласуются с формальным обобщением разностных оператор путем замены количества сочетаний на Гамма-функцию.

В одном из примеров мы покажем вычислтельную схемму для дробного диффузионного уравнения. Параметр дробности вводится в систему через временнную переменную.

1. Задача I

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^{\alpha}x(t)}{dt^{\alpha}}+x(t)=0, \quad \alpha\in(0,1] \tag{1}$$

$$x(0)=1 \tag{2}$$

В этой задаче мы можем использовать численную схему, заменив дифференциальный оператор на матрицу. В случае $\alpha=1$, мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dx}{dt}\approx\frac{x_{i+1}-x_i}{\tau}, i=0..n, \quad x_0=1$$

Система линейных уравнений для уравнения (1) с учетом начальных условий будет иметь вид:

$$\frac{1}{\tau}\begin{pmatrix}1&0&..&0\\-1&1&..&0\\0&-1&..&0\\..&..&..&..\\0&0&..&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\..\\x_n\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-\frac{1}{\tau}&0&..&0\\1&0&..&0\\0&1&..&0\\..&..&..&..\\0&0&..&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\..\\x_n\end{pmatrix} \tag{3}$$

Вычислим дробную степень α матрицы A в левой части уравнения, которая аппроксимирует разность первого порядка. В нашем случае параметр α выберем равным $\frac{1}{2}$. Используем рекурсивную схему (4) для нахождения дробной степени матрицы.

$$B_{n+1}=\frac{B_n+A\cdot B_n^{-1}}{2} \tag{4}$$

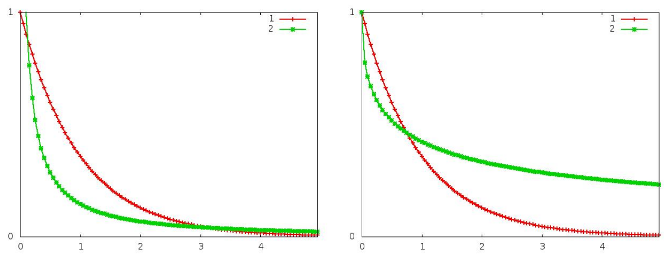

Рис. 1. *a)* – решения (3) и (5); *1* – $\alpha = 1$, *2* – $\alpha = \frac{1}{2}$; *b)* – регуляризованное решение (5).

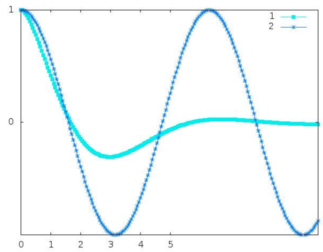

Рис. 2. Решение системы (5) при значениях: *1* – $\alpha = 2$, *2* – $\alpha = \frac{3}{2}$

Если $B_0 = A$ и $n \to \infty$, мы получаем $B_n \approx \sqrt{A}$. Таким образом, мы приходим к системе уравнений (5) для численного моделирования.

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -.5 & 1 & 0 & 0 \\ -.125 & -.5 & 1 & 0 \\ -.0625 & -.125 & -.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\tau}} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Когда $\alpha = \frac{1}{2}$, решение имеет особенность в начальной точке $t = 0$ (fig. **??** – *a*). Модифицируем систему линейных уравнений (5). Для этого выполним замену вектора $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ на вектор $(x_0, x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0)$ в левой части системы. Таким образом решение системы уравнений не имеет особенность в начальной точке (fig. **??** – *б*).

Рассмотрим коэффициенты матрицы $\sqrt{A}$. Мы рассмотрим приближение дробной разности порядка ν:

$$H^{\nu} f(x) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau^{\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\Gamma(\nu-k+1)} f(x - k\tau), \tag{6}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Вычисление коэффициентов при $f(x - k\tau)$ дает совпадение со значением элементов матрицы $\sqrt{A}$. Таким образом, мы получаем совпадение вычислительного метода и разностным оператором Грюнвальда-Летникова.

2. Задача II

Рассмотрим формальную запись уравнения с дробной степенью:

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} + x(t) = 0, \quad \alpha \in (1,2] \tag{7}$$

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0 \tag{8}$$

We represent an left-side operator in first case by multiple of A and A, in second one – by A multiples $\sqrt{A}$, where A is a matrix of the first difference in (1).

For $\alpha = \frac{3}{2}$ the solution is underdamping oscillations. It is a main feature of systems with fractional dynamics. The same characteristics are represented in an equation of a fractional oscillator [2].

3. Задача III

Пусть u(t,x,y) задана в области $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ и $t \in [0,\infty)$. Функция удовлетворяет уравнению (9) с начальными и граничными условиями.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{9}$$

$$u(0,x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y), \quad u(t,x,y)|_\Gamma = 0 \tag{10}$$

Решение этой системы представляется в виде:

$$u(t,x,y) = e^{-2\pi^2 t}\sin(\pi x)\sin(\pi y) \tag{11}$$

Численное решение можно представить явной схемой:

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{(u_{i+1j}^k + u_{i-1j}^k + u_{ij+1}^k + u_{ij-1}^k - 4u_{ij}^k)}{h^2} \tag{12}$$

Левая часть (12) может быть представлена в виде матрицы системы линейных уравнений. Дробная степень этой матрицы дает новое приближение для разностного аналога дифференциального оператора.

Рассмотрим классическое решение (11) и решение с дробной степенью матрицы в левой части (12). Отличия решений в случаях $\alpha = 1$ и $\alpha = \frac{1}{2}$ представлено на рис. 2. В численном методе, когда в качестве приближения по переменной t выбирается первая разность, то есть обычная матрица A, мы получаем приближение классического решения (11). В противном случае решение замедляет свое спадание со временем для дробной степени матричного оператора (рис. 2). Таким образом динамика такой задачи совпадает с решением для примера системы в задаче I.

4. Заключение

Численные решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с дробной степенью оператора показывает наличие "эффекта памяти". Для физических систем это означает, что процесс имеет длительную

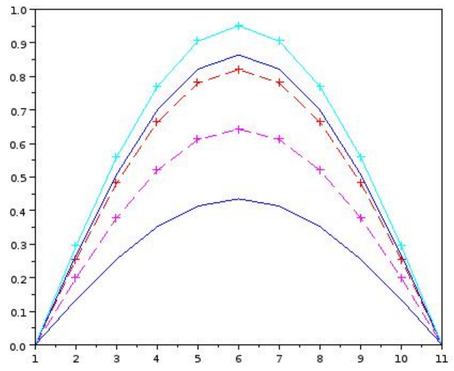

Рис. 3. Численное решение. Классическая схема – сплошная линия; дробная степень разностного оператора – сплошная линия с крестами.

релаксацию процесса. Такую методику моделирования можно применять в задачах расчета напряженно-деформированного состояния сред.

Библиографический список

1. Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. М., Ижевск: РХД, 2011. 568 с.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 05.11.2013