DOI: 10.18454/2079-6641-2014-8-1-14-19

УДК 517.956

ПОСТАНОВКА И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М. Мамажонов, С.М. Мамажонов

Кокандский государственный педагогический университет им. Мукини,
113000, Узбекистан, г. Коканд, ул. Амира Темура, 37

E-mail: dpi@quqon.uz

Настоящая работа посвящена изучению методики исследования некоторых краевых задач для одного класса параболо-гиперболических уравнений четвертого порядка в вогнутой шестиугольной области, которые воспользуется при изучении задач математической физики в магистратуре.

Ключевые слова: краевые условия, условие склеивания, интегральное уравнение Вольтерра второго рода

MSC 35M13

STATEMENT AND RESEARCH METHOD SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A CLASS OF FOURTH ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE

M. Mamajonov, S.M. Mamajonov

Kokand State Pedagogical Institute by Mukini, 113000, Uzbekistan, Kokand, Amira Temura st. 37

E-mail: dpi@quqon.uz

This paper studies the methods of investigation of some boundary value problems for a class of parabolic-hyperbolic equations of the third order in the hexagonal concave areas that take advantage of the study of problems of mathematical physics in the magistracy.

Key words:operator boundary conditions, the condition of bonding, Volterra integral equation of the second kind

Введение

Развитие уравнений в частных производных обусловлено широких кругом прикладных задач в физике, экономике, биологии и в других науках. В рамках теории уравнений математической физики как дисциплины, читаемой в магистратуре, большой интерес представляют уравнения смешанного типа. Такие уравнения могут быть использованы при описании различных физических процессов от пространственных околозвуковых течений идеального политропного газа, гидродинамических течений с переходом через скорость звука до бесконечно малых изгибаний поверхностей.

Постановка задачи

Рассмотрим на плоскости xOy обдасть D, где

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup AB \cup AA_0, D_1 = \left\{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x, y) \in R^2 : -1 < y < 0, 0 < x < y+1\right\}, AB = \left\{(x, y) \in R^2 : y = 0, 0 < x < 1\right\},$$

$$D_3 = \left\{(x, y) \in R^2 : -1 < x < 0, 0 < y < 1\right\}, AA_0 = \left\{(x, y) \in R^2 : x = 0, 0 < y < 1\right\},$$

т.е. D – есть шестиугольная область с вершинами в точках $A(0, 0)$, $C(0, -1)$, $B(1, 0)$, $B_0(1, 1)$, $D_0(-1, 1)$, $D(-1, 0)$. Точка A_0 имеет координаты $A_0(0, 1)$.

Область D_2 разделим на две части с помощью отрезка

$$AE = \left\{(x, y) \in R^2 :\ 0 < x < \frac{1}{2}, y = -x\right\}.$$

Тогда область D_2 можно записать в виде

$$D_2 = D_{21} \cup D_{22} \cup D_3 \cup AE,$$

$$D_{21} = \left\{(x, y) \in R^2 : -\frac{1}{2} < y < 0, -y < x < y+1\right\},$$

$$D_{22} = \left\{(x, y) \in R^2 : 0 < x < \frac{1}{2}, x-1 < y < -x\right\},$$

, а $E\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

В области D рассмотрим уравнение

$$\left(a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu) = 0, \tag{1}$$

где $a_1, b_1, a_2, b_2 \in R,\ Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y & D_1, \\ L_i u \equiv u_{xx} - u_y & D_i\ (i = 2, 3). \end{cases}$

Перед тем, как приступить к постановке задачи запишем все краевые условия и условия склеивания на линиях изменения типа, которые воспользуются при постановке краевой задачи.

Краевые условия:

$$u(1, y) = \varphi_1(y), 0 \le y \le 1, \tag{2}$$

$$u_x(1, y) = \varphi_2(y), 0 \le y \le 1, \tag{3}$$

$$u_{xx}(1,y)=\varphi_3(y), 0\le y\le 1, \tag{4}$$

$$u(-1,y)=\varphi_4(y), 0\le y\le 1, \tag{5}$$

$$u_x(-1,y)=\varphi_5(y), 0\le y\le 1, \tag{6}$$

$$u_{xx}(-1,y)=\varphi_6(y), 0\le y\le 1, \tag{7}$$

$$u(0,y)=\varphi_7(y), -1\le y\le 0, \tag{8}$$

$$u_x(0,y)=\varphi_8(y), -1\le y\le 0 \tag{9}$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_9(y), -1\le y\le 0, \tag{10}$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_9(y), -\frac{b_2}{a_2}\le y\le 0, \tag{11}$$

$$u_{xxx}(0,y)=\varphi_{10}(y), -1\le y\le 0, \tag{12}$$

$$u_{xxx}(0,y)=\varphi_9(y), -\frac{b_1}{a_1}\le y\le 0, \tag{13}$$

$$u(x,0)=f_1(x), -1\le x\le 0, \tag{14}$$

$$u_y(x,0)=f_2(x), -1\le x\le 0, \tag{15}$$

$$u_{yy}(x,0)=f_3(x), -1\le x\le 0, \tag{16}$$

$$u_{yyy}(x,0)=f_4(x), -1\le x\le 0, \tag{17}$$

$$u|_{BC}=\psi_1(x), 0\le x\le 1, \tag{18}$$

$$u|_{BE}=\psi_1(x), \frac{1}{2}\le x\le 1, \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_2(x), 0\le x\le 1 \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{BC}=\psi_3(x), 0\le x\le 1, \tag{21}$$

Условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x,-0)=u(x,+0), 0\le x\le 1, \tag{22}$$

$$u_y(x,-0) = u_y(x,+0), 0 \le x \le 1, \tag{23}$$

$$u_{yy}(x,-0) = u_{yy}(x,+0), 0 \le x \le 1, \tag{24}$$

$$u_{yyy}(x,-0) = u_{yyy}(x,+0), 0 \le x \le 1, \tag{25}$$

$$u(-0,y) = u(+0,y), 0 \le y \le 1, \tag{26}$$

$$u_x(-0,y) = u_x(+0,y), 0 \le y \le 1, \tag{27}$$

$$u_{xx}(-0,y) = u_{xx}(+0,y), 0 \le y \le 1, \tag{28}$$

$$u_{xxx}(-0,y) = u_{xxx}(+0,y), 0 \le y \le 1. \tag{29}$$

Здесь $\varphi_i \left(i = \overline{1,10}\right)$, $\psi_j \left(j = \overline{1,3}\right)$, $f_k \left(k = \overline{1,4}\right)$ – заданные достаточно гладкие функции, n – внутренняя нормаль к прямой $x - y = 1$. В зависимости от коэффициентов a_1, b_1, a_2, b_2 характеристик $b_1 x - a_1 y = const$ и $b_2 x - a_2 y = const$ операторов $a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y}$ и $a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y}$ уравнения (1) получается очень много случаев, основными которых являются 22 случая, для которых ставятся различные краевые задачи.

Приступим к постановке краевой задачи для уравнения (1).

Задача. *Найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$; 2) удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей D_i $(i = 1,2,3)$; 3) удовлетворяет краевым условиям и условиям склеивания на линиях изменения типа из таблицы.*

В настоящей статье укажем идею решения поставленной задачи лишь в случае 1^o. В этом случае уравнение (1) имеет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Lu) = 0.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$Lu_i = \omega_{i1}(y) \cdot x + \omega_{i2}(y), \ i = 1,2,3,$$

где введено обозначение $u(x,y) = u_i(x,y)$, $(x,y) \in D_i$, а $\omega_{ij}(y)$ $(i = 1,2,3;\ j = 1,2)$ – произвольные достаточно гладкие функции, подлежащие определению. Последнее уравнение можно записать в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_{11}(y) \cdot x + \omega_{12}(y), \ (x,y) \in D_1, \tag{30}$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_{i1}(y) \cdot x + \omega_{i2}(y), (x,y) \in D_i \ (i = 2,3). \tag{31}$$

В уравнении (31) $(i = 2)$ введем обозначения $u_2(x,y) = u_{2k}(x,y)$, $\omega_{2j}(y) = \omega_{2kj}(y)$ при $(x,y) \in D_{2k}$ $(j = 1,2;\ k = 1,2)$. Тогда уравнение (31) $(i = 2)$ имеет вид

$$u_{2kxx} - u_{2kyy} = \omega_{2k1}(y) \cdot x + \omega_{2k2}(y), (x,y) \in D_{2k} \ (k = 1,2). \tag{32}$$

Таблица

Классификация краевых задач

Случаи	Краевые условия	Условия склеивания
1^o. $a_1 = a_2 = 1$; $b_1 = b_2 = 0$	(2), (5)-(7), (14), (15), (18), (20), (21)	(22),(23), (26)-(29)
2^o. $a_1 = 1, b_1 = 0$; $a_2 = 0, b_2 = 1$	(2), (5), (6), (14)-(16), (18), (20), (21)	(22)-(24),(26)-(28)
3^o. $a_1 = a_2 = 0$; $b_1 = b_2 = 1$	(2), (5), (14)-(18), (20), (21)	(22)-(27)
4^o. $a_1 = 1, b_1 = 0; 0 < \gamma_2 < 1$, $\gamma_2 = \frac{b_2}{a_2}$	(2), (5)-(10), (12), (14)- (16) или (2), (5)-(9), (11), (12), (14)-(16)	(22)-(24),(26)-(29)
5^o. $a_1 = 1, b_1 = 0$; $\gamma_2 = 1$	(2), (5) – (10), (12), (14) – (16)	(22)-(24),(26)-(29)
6^o. $a_1 = 1, b_1 = 0$; $1 < \gamma_2 < +\infty$	(2), (5)-(10), (12), (14)-(16), (20)	(22)-(24),(26)-(29)
7^o. $a_1 = 1, b_1 = 0$; $-\infty < \gamma_2 < 0$	(2)-(5), (14)-(16), (18), (20), (21)	(22)-(24),(26)-(29)
8^o. $a_1 = 0, b_1 = 1$; $0 < \gamma_2 < 1$	(2), (5), (6), (8), (11), (14)-(17), (19), (20), (21)	(22)-(28)
9^o. $a_1 = 0, b_1 = 1$; $\gamma_2 = 1$	(2), (5), (6), (8)-(10), (14)-(17), (20)	(22)-(28)
10^o. $a_1 = 0, b_1 = 1$; $1 < \gamma_2 < +\infty$	(2), (5), (6), (8)-(10), (14)-(17), (20), (21)	(22)-(28)
11^o. $a_1 = 0, b_1 = 1$; $-\infty < \gamma_2 < 0$	(2), (3), (5), (14)-(17), (18), (20), (21)	(22)-(28)
12^o. $0 < \gamma_1 < 1$; $0 < \gamma_2 < 1$ $\left(\gamma_1 = \frac{b_1}{a_1}, a) \gamma_1 \neq \gamma_2; b) \gamma_1 = \gamma_2\right)$	(2), (5)-(9), (11), (13), (14)-(17), (19), (20), (21)	(22)-(29)
13^o. $\gamma_1 = 1$; $0 < \gamma_2 < 1$	(2), (5)-(9), (11), (12), (19), (20)	(22)-(29)
14^o. $1 < \gamma_1 < +\infty$; $0 < \gamma_2 < 1$	(2), (5)-(9), (11), (14)- (17), (19), (20), (21)	(22)-(29)
15^o. $-1 < \gamma_1 < 0$; $0 < \gamma_2 < 1$	(2), (3), (5), (6), (8), (9), (11),(14)-(17),(19),(20),(21)	(22)-(29)
16^o. $\gamma_1 = -1$; $0 < \gamma_2 < 1$	(2), (3), (5), (6), (8), (11), (14)-(17), (19), (20)	(22)-(29)
17^o. $-\infty < \gamma_1 < -1$; $0 < \gamma_2 < 1$	(2), (3), (5), (6), (14)-(18), (20), (21)	(22)-(29)
18^o. $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 1$	(2), (5) – (10),(12),(14) – (17)	(22)–(29)
19^o. $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = -1$	(2), (3), (5), (6), (8)- (10), (12), (14)-(17)	(22)-(29)
20^o. $1 < \gamma_1 < +\infty; 1 < \gamma_2 < +\infty$, $(a) \gamma_1 \neq \gamma_2; b) \gamma_1 = \gamma_2)$	(2), (5)-(10), (12), (14)-(17), (20), (21)	(22)-(29)
21^o. $1 < \gamma_1 < +\infty; -\infty < \gamma_2 < 0$	(2), (3), (5), (6), (8), (10), (14)-(17), (19), (20), (21)	(22)-(29)
22^o. $-\infty < \gamma_1 < -1; -\infty < \gamma_2 < 0$, $(a) \gamma_1 \neq \gamma_2; b) \gamma_1 = \gamma_2)$	(2)-(5), (14)-(18), (20), (21)	(22)-(29)

Записывая решение уравнения (32) $(k = 1)$, удовлетворяющее условиям $u_{21}(x, 0) = \tau_1(x)$, $u_{21y}(x, 0) = \nu_1(x)$, где $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, и удовлетворяя условиям (20), (21), получим систему уравнений относительно $\omega_{211}(y)$ и $\omega_{212}(y)$, из которой находим эти функции.

Затем записывая решение уравнения (32) $(k=2)$, удовлетворяющее условиям $u_{22}(0,y)=\tau_3(y)$, $u_{22x}(0,y)=\nu_3(y)$, где $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, и удовлетворяя условиям (20), (21), получим систему уравнений относительно $\omega_{221}(y)$ и $\omega_{222}(y)$ при $-1\le y\le -\frac{1}{2}$, из которой находим эти функции при $-1\le y\le -\frac{1}{2}$. Для определения этих функций при $-\frac{1}{2}\le y\le 0$ воспользуемся из условий

$$\left(\frac{\partial u_{22}}{\partial x}+\frac{\partial u_{22}}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=-x}=\left(\frac{\partial u_{21}}{\partial x}+\frac{\partial u_{21}}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=-x},$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_{22}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u_{22}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_{22}}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{y=-x}=\left(\frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u_{21}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_{21}}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{y=-x}.$$

С помощью этих условий находим функции $\omega_{221}(y)$ и $\omega_{222}(y)$ в промежутке $-\frac{1}{2}\le y\le 0$.

Затем из гиперболической части и параболической части переходя к пределу, когда $y\to 0$ получим две соотношения относительно $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, из которых находим эти функции и тем самым – функции $u_{21}(x,y)$, $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$, $u_{22}(x,y)$.

Переходим в область D_3. Воспользуясь методом продолжения и условиям склеивания из гиперболической части D_3 области D мы получим три соотношения для определения шести неизвестных функций, когда $x\to 0$. А также, из параболической части D_1 области D получим еще три соотношения для определения этих функций, когда $x\to 0$. Таким образом, мы получим систему шести уравнений относительно шести неизвестных функций. Исключаем из полученной системы пять из шести неизвестных функций, тогда мы приходим к интеральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $\tau_2''(y)$, ядро которого имеет слабую особенность, а правая часть непрерывна. Решая это уравнение, мы единственным образом находим эту функцию и тем самым – функции $u_1(x,y)$, $u_3(x,y)$. Таким образом, мы доказали однозначную разрешимость поставленной задачи в случае 1^o.

В работах [1]-[2] были рассмотрены ряд краевых задач для уравнения (1).

Библиографический список

1. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.

2. Джураев Т.Д., Мамажанов М. О корректной постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19. №1. С. 37-50.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 07.04.2014