Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2014. № 2(9). С. 53-58. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2014-9-2-53-58

УДК 517.955

ПРОХОЖДЕНИЕ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ СРЕДЫ ИМЕЮЩИЕ СТРУКТУРУ ГОМОГЕННЫХ ФРАКТАЛОВ

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет, 634050, г. Томск, пр. Ленина 30
E-mail: vachurikov@list.ru

В работе обобщается закон Бугера-Ламберта-Бера на случай гомогенного фрактала. С помощью дробного анализа в терминах d-оператора выводится обобщенный закон Бугера-Ламберта-Бера, который в частности содержит классический закон оптики Бугера-Ламберта-Бера.

Ключевые слова: d оператор, гомогенный фрактал, фрактальная размерность, закон Бугера-Ламберта-Бера

MSC 35C05

PASSAGE THROUGH X-RAY PROTECTION HAVING THE STRUCTURE OF HOMOGENEOUS FRACTALS

V.A. Churikov

Tomsk Polytechnic University, Tomsk, 634050, Tomsk, pr. Lenina 30, Russia
E-mail: vachurikov@list.ru

In this paper we generalize the law of Bouguer-Lambert in the case of a homogeneous fractal. With detailed analysis in terms of d-output operator generalized law of Bouguer-Lambert-Beer law, which in particular includes the classical law of optics Bouguer-Lambert-Beer.

Key words: d-operator, homogeneous fractal, fractal dimension, the law of Bouguer-Lambert-Beer

Введение

Предположим, что в трёхмерном евклидовом пространстве содержится фрактал x_α, который вдоль оси x имеет дробную размерность α, для которой справедливы неравенства $0 \leq \alpha \leq 1$. Рассматриваемый фрактал предполагается изотропным и гомогенным, т. е. его размерность постоянна $\alpha = const$ и не зависит как от пространственных координат, так и от времени. Кроме этого, предполагается, что топологические свойства фрактала не зависят от пространства и от времени. Точки фрактала x_α лежат на вещественной оси x. Точки оси x, не принадлежащие фракталу, принадлежат сопряжённому фракталу $x_{1-\alpha}$, размерности $1-\alpha = const$, $0 \leq 1-\alpha \leq 1$, который тоже является гомогенным фракталом. Фрактал x_α, в свою очередь, сам является сопряженным фракталом по отношению к своему сопряжённому фракталу $x_{1-\alpha}$.

На координате x точки фрактала и сопряжённого фрактала находятся в соотношении

$$x_\alpha \cup x_{1-\alpha} = x; x_\alpha \cap x_{1-\alpha} = \emptyset.$$

Второе соотношение будем называть свойством *ортогональности фракталов*, из которого следует, что многие физические процессы, проходящие во фрактале и в сопряжённом фрактале, могут проходить независимо, не влияя друг на друга.

В частности к таким процессам можно отнести взаимодействие электромагнитного излучения с фракталом и с сопряжённым фракталом.

Постановка задачи

Затухание пучка электромагнитного излучения в сплошной среде описывается дифференциальным уравнением, которое описывает поглощение светового пучка в среде, распространяющегося вдоль оси x [1]

$$dI = -kIdx.$$

Здесь I интенсивность излучения вдоль пространственной координаты ; k – коэффициент ослабления пучка в среде.

Если сплошная среда состоит из объединения фрактала и сопряжённого фрактала, которые имеют различные физико-химические свойства, то процессы взаимодействия фотонов в них будут отличаться, а соответствующее дифференциальное уравнение описывающее ослабление пучка фотонов можно переписать в виде соотношения

$$dI \propto (-\tau_\alpha k_\alpha I dx_\alpha) \cup (-\tau_{1-\alpha} k_{1-\alpha} I dx_{1-\alpha}). \quad (1)$$

Здесь dx_α и $dx_{1-\alpha}$ дифференциалы по точкам фрактала x_α, и сопряжённого фрактала $x_{1-\alpha}$ которые лежат на оси x; k_α *линейный коэффициент ослабления* во фрактале можно представить в виде суммы $k_\alpha = k_{\alpha|A}(\lambda) + k_{\alpha|D}(\tau_\alpha) + k_{\alpha|S}(\tau_\alpha)$, $k_{\alpha|A}(\lambda)$ *коэффициент поглощения*, который зависит от длины волны фотонов λ и от других факторов, $k_{\alpha|D}(\tau_\alpha)$ *коэффициент внутренней дифракции*, описывающий дифракцию на внутренних структурах фрактала и зависящий от геометрических и топологических особенностей фрактала, т. е. от τ_α, $k_{\alpha|S}(\tau_\alpha)$ *коэффициент внутреннего рассеяния* на неровностях фрактала, который тоже зависит от τ_α; τ_α – *топологический коэффициент* фрактального пространства для рассматриваемого процесса [2], $0 \leq \tau_\alpha \leq 1$; $k_{1-\alpha}$ линейный коэффициент ослабления в сопряжённом фрактале, который, как и во фрактале удобно представить как сумму $k_{1-\alpha} =$

$k_{1-\alpha|A}(\lambda)+k_{1-\alpha|D}(\tau_{1-\alpha})+k_{1-\alpha|S}(\tau_{1-\alpha})$; $k_{1-\alpha|A}(\lambda)$ коэффициент поглощения в сопряжённом фрактале, $k_{1-\alpha|D}(\tau_{1-\alpha})$ коэффициент внутренней дифракции в сопряжённом фрактале, $k_{1-\alpha|S}(\tau_{1-\alpha})$ коэффициент внутреннего рассеяния на неровностях сопряжённого фрактала; $\tau_{1-\alpha}$ – топологический коэффициент сопряжённого фрактала, $0 \le \tau_{1-\alpha} \le 1$.

Топологические коэффициенты τ_α, и $\tau_{1-\alpha}$ зависят от конкретных топологических и геометрических свойств фрактала и сопряжённого ему фрактала.

В случае, когда рассматриваемый процесс невозможен из-за топологических свойств, то процесс *топологически запрещён*, тогда $\tau_\alpha = \tau_{1-\alpha} = 0$. Рассматриваемый процесс осуществляется только через фракталы, у которых топологические коэффициенты отличны от нуля. Поэтому, если топологический коэффициент хотя бы одного фрактала отличен от нуля, то рассматриваемый процесс *топологически разрешён* в данной среде.

Для коэффициентов внутренней дифракции фрактала и сопряжённого фрактала всегда должно выполняться равенство

$$k_{\alpha|D}(\tau_\alpha) = k_{1-\alpha|D}(\tau_{1-\alpha}).$$

Данное равенство выполняется ввиду того, что фрактал и сопряжённый фрактал имеют общую границу, на которой и происходит внутренняя дифракция. Поэтому в соотношениях, в которых фигурируют эти коэффициенты можно оставить любой из этих двух коэффициентов.

Строго говоря, ставить знак равенства в соотношении (1) нельзя, ввиду того, что физические размерности левой и правой части в уравнении при такой замене уже не совпадают

$$[dx_\alpha] = L^\alpha; [dx_{1-\alpha}] = L^{1-\alpha}; [dx] = L.$$

Кроме этого нельзя складывать значения слагаемых в правой части по той же причине. Поэтому вместо знака равенства поставлен знак пропорциональности $\propto$, а вместо сложения, знак объединения $\cup$.

Для дифференциалов на фракталах будет справедливо

$$dx = dx_\alpha \cup dx_{1-\alpha}.$$

В силу ортогональности фрактала и сопряжённого фрактала для дифференциалов тоже будет справедливо свойство ортогональности

$$dx_\alpha \cap dx_{1-\alpha} = \emptyset.$$

Получение решения

Вначале, для получения решения разделим переменные и поставим под знак интеграла.

$$\int \frac{dI}{I} \propto (-\tau_\alpha k_\alpha \int dx_\alpha) \cup (-\tau_{1-\alpha} k_{1-\alpha} \int dx_{1-\alpha}). \tag{2}$$

Преобразуем правую часть так, чтобы оба члена были согласованны между собой качественно и количественно, а также были бы согласованы с левой частью.

Для этого правую часть необходимо привести к одному масштабу и к одной физической размерности с левой частью. Для этого первый член в правой части надо умножить на *коэффициент преобразования размерности* $x^{1-\alpha}$, а второй на *коэффициент преобразования размерности* x^{α}, который переводит размерность правой части до размерности евклидова пространства, в котором находятся фрактал и сопряжённый фрактал. Физически это соответствует тому, что учитывается прохождение пучка фотонов по всем точкам на оси x, часть из которых принадлежит фракталу, а остальные – по сопряжённому фракталу.

Далее первый член в правой части необходимо умножить на *масштабный коэффициент фрактала* $\alpha^2\Gamma(\alpha)$, а второй член на масштабный коэффициент сопряжённого фрактала $(1-\alpha)^2\Gamma(1-\alpha)$. Эти коэффициенты переводят длину прохождения пучка к *эффективной толщине фрактала* и к *эффективной толщине сопряжённого фрактала* $(1-\alpha)x$ которые в одномерном случае составляют соответственно αх и $(1-\alpha)x$.

В результате, переход от интегрирования по фракталу размерности α к интегралу дробного порядка α на основе d-оператора сводится к замене

$$\int dx_\alpha \to \alpha^2\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}\int d^\alpha x,$$

$$\int dx_{1-\alpha} \to (1-\alpha)^2\Gamma(1-\alpha)x^{\alpha}\int d^{1-\alpha}x.$$

Здесь $\int d^\alpha x$ и $\int d^{1-\alpha}x$ интегралы дробных порядков α и $\alpha 1$; $\Gamma(...)$ гамма-функция Эйлера.

После проведённых преобразований оба члена в правой части можно сложить и приравнять их сумму с левую частью и в результате получим уравнение в котором переменные разделены

$$\int \frac{dI}{I} = -\tau_\alpha k_\alpha \alpha^2\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}\int d^\alpha x - \tau_{1-\alpha}k_{1-\alpha}(1-\alpha)^2\Gamma(1-\alpha)x^\alpha\int d^{1-\alpha}x.$$

Интегрируя левую часть, получим

$$\int \frac{dI}{I} = \ln(I) - \ln(C).$$

Здесь C – константа интегрирования.

Интегрируя правую часть с помощью d-оператора [3], получим для первого слагаемого

$$-\tau_\alpha k_\alpha \alpha^2\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}\int d^\alpha x = -\frac{\tau_\alpha k_\alpha \alpha^2\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}}{\alpha(\alpha)}x^\alpha + \alpha^2\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}C_\alpha(x).$$

Интегрируя второе слагаемое, получим

$$-\tau_{1-\alpha}k_{1-\alpha}(1-\alpha)^2\Gamma(1-\alpha)x^\alpha\int d^\alpha x =$$

$$= -\frac{\tau_{1-\alpha}k_{1-\alpha}(1-\alpha)^2\Gamma(1-\alpha)x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(1-\alpha)}x^\alpha + (1-\alpha)^2\Gamma(1-\alpha)x^\alpha C_{1-\alpha}(x).$$

Здесь $C_\alpha(x)$ и $C_{1-\alpha}(x)$ полиномы интегрирования порядков α и 1α, которые в рамках d-анализа являются обобщением констант интегрирования [3].

Приравняем к нулю вторые слагаемые, ввиду их произвольности

$$\alpha^2\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}C_\alpha(x)=0,$$

$$(1-\alpha)^2\Gamma(1-\alpha)x^\alpha C_{1-\alpha}(x)=0.$$

Окончательно получим для суммы в правой части

$$-\tau_\alpha k_\alpha \alpha^2\Gamma(\alpha)x^{1-\alpha}\int d^\alpha x=-\tau_\alpha k_\alpha \alpha x,$$

$$-\tau_{1-\alpha}k_{1-\alpha}(1-\alpha)^2\Gamma(1-\alpha)x^\alpha\int d^\alpha x=-\tau_{1-\alpha}k_{1-\alpha}(1-\alpha)x.$$

Приравняв обе части, получим решение

$$\ln(I)=-\tau_\alpha k_\alpha \alpha x-\tau_{1-\alpha}k_{1-\alpha}(1-\alpha)x+\ln(C).$$

Потенцируя это выражение, получим общее решение в явном виде

$$I=C\exp(-\{\tau_\alpha k_\alpha\alpha+\tau_{1-\alpha}k_{1-\alpha}(1-\alpha)\}x).$$

Найдём частное решение для задачи Коши с начальными условиями x_0 и $I_0=I(x_0)$. Выразив константу интегрирования через начальные условия, получим: $C=\exp(-\{\tau_\alpha k_\alpha\alpha+\tau_{1-\alpha}k_{1-\alpha}(1-\alpha)\}x_0+\ln(I_0))$. Подставив значение C в общее решение, найдём частное решение для заданных начальных условий, которое является обобщением закона Бугера-Ламберта-Бера (БЛБ) на случай распространения светового пучка в рассматриваемой среде, которая является объединением фрактала и сопряжённого фрактала

$$I=I_0\exp[-\{\tau_\alpha\alpha k_\alpha+\tau_{1-\alpha}(1-\alpha)k_{1-\alpha}\}(x-x_0)]. \tag{3}$$

Здесь $x-x_0\geq 0$ толщина среды, через которую проходит пучок фотонов, а $\alpha(x-x_0)$ *эффективная толщина фрактала*, а $(1-\alpha)(x-x_0)$ эффективная толщина сопряжённого фрактала, для которых всегда выполняется равенство

$$(x-x_0)=\alpha(x-x_0)+(1-\alpha)(x-x_0).$$

В частности, когда $\alpha=1$, (или $\alpha=0$), тогда эффективная толщина фрактала (или сопряжённого фрактала) становится равным нулю и топологический коэффициент будет $\tau_\alpha=1$ (или $\tau_{1-\alpha}=1$), что соответствует отсутствию фрактала (или сопряжённого фрактала). В этих предельных случаях среда становится сплошной и соотношение (3) переходит в классический закон БЛБ, $I=I_0\exp[-k(x-x_0)]$ [1].

В случае, когда $\tau_\alpha k_\alpha\alpha >> \tau_{1-\alpha}k_{1-\alpha}(1-\alpha)$ или $\tau_\alpha k_\alpha\alpha << \tau_{1-\alpha}k_{1-\alpha}(1-\alpha)$, то ослаблением пучка можно пренебречь в сопряжённом фрактале, или во фрактале. Тогда соотношение перейдёт в закон БЛБ для одного гомогенного фрактала. Такое приближение называется *приближением одного потока* [4].

Предположим, что фрактал состоит из атомов одного элемента, а сопряжённый фрактал их из атомов другого элемента. Будем считать, что через среду проходит пучок жёсткого рентгеновского излучения с длиной волны менее одного ангстрема. В этом случае можно пренебречь внутренней дифракцией. Тогда коэффициенты ослабления для прохождения рентгеновского излучения через фрактал и сопряжённый фрактал будут [5]

$$k_\alpha=k_{\alpha|A}(\lambda)+k_{\alpha|S}(\tau)\approx\frac{\eta_\alpha N_A}{A_\alpha}\left(B_\alpha Z_\alpha^4\lambda^3+\frac{8\pi e^4 Z_\alpha}{3m^2c^4}\right),$$

$$k_{1-\alpha} = k_{1-\alpha|A}(\lambda) + k_{1-\alpha|S}(\tau) \approx \frac{\eta_{1-\alpha} N_A}{A_{1-\alpha}} \left(B_{1-\alpha} Z_{1-\alpha}^4 \lambda^3 + \frac{8\pi e^4 Z_{1-\alpha}}{3m^2 c^4} \right).$$

Здесь $k_{\alpha|A}(\lambda)$ и $k_{1-\alpha|A}(\lambda)$ коэффициенты поглощения связанные с взаимодействием рентгеновского излучения и внутренних электронов оболочек атомов фрактала и сопряжённого фрактала (внутренний фотоэффект); $k_{\alpha|S}(\tau)$ и $k_{1-\alpha|S}(\tau)$ коэффициенты рассеяния для материала фрактала и сопряжённого фрактала; B_α и $B_{1-\alpha}$ полуэмпирические коэффициенты, зависящие от длины волны фотонов и от атомной структуры вещества фрактала и сопряжённого фрактала [3]; Z_α и $Z_{1-\alpha}$ заряды ядер элементов из которых состоит фрактал и сопряжённый фрактал; η_α и $\eta_{1-\alpha}$ плотности материала фрактала и сопряжённого фрактала; N_A число Авогадро; A_α и $A_{1-\alpha}$ веса одного грамм-атома (атомный вес) вещества фрактала и сопряжённого фрактала; e заряд электрона; m масса электрона; скорость света.

Подставив полученные выражения для коэффициентов k_α и $k_{1-\alpha}$ в (3) и получим закон БЛБ описывающий прохождение жёсткого рентгеновского излучения через среду, состоящую из двух гомогенных и ортогональных фракталов

$$I = I_0 \exp\left[-\left\{ \tau_\alpha \alpha \left(\frac{\eta_\alpha N_A}{A_\alpha} \left(B_\alpha Z_\alpha^4 \lambda^3 + \frac{8\pi e^4 Z_\alpha}{3m^2 c^4} \right) \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \tau_{1-\alpha}(1-\alpha) \frac{\eta_{1-\alpha} N_A}{A_{1-\alpha}} \left(B_{1-\alpha} Z_{1-\alpha}^4 \lambda^3 + \frac{8\pi e^4 Z_{1-\alpha}}{3m^2 c^4} \right) \right\} (x - x_0) \right].$$

Для рассматриваемой задачи с большой точностью можно принять $\tau_{1-\alpha} = \tau_\alpha = 1$.

Библиографический список

1. Ахманов С.А., Никитин С. Ю. Физическая оптика. 2-е изд. М.: Наука, 2004. 656 с.

2. Чуриков В.А. Замечания по поводу дробной размерности при описании процессов во фракталах // Математика и математическое моделирование: Сборник материалов VII всероссийской молодежной научно-инновационной школы (г. Саров, СарФТИ НИЯУ МИФИ, 16 – 19 апреля 2013 г.). Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ. 2013. С. 59.

3. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. Томск: Изд-во ТПУ, 2011. 72 с.

4. Чуриков В.А. Замечания о методе разделения потоков без обмена при описании физических процессов на фракталах // Математика и математическое моделирование: Сборник материалов VII всероссийской молодежной научно-инновационной школы (г. Саров, СарФТИ НИЯУ МИФИ, 16–19 апреля 2013 г.). Саров: СарФТИ НИЯУ МИФИ. 2013. С. 54–55.

5. Блохин М.А. Физика рентгеновских лучей. М.: ГИТТЛ. 1957. 518 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 03.12.2014