DOI: 10.18454/2079-6641-2014-9-2-23-29

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 27.35:37.15

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕРСИЙ В РАМКАХ МАЛОМОДОВОЙ МОДЕЛИ КРУПНОМАСШТАБНОГО ДИНАМО

Г.М. Водинчар[1, 2], А.Н. Годомская[1], О.В. Шереметьева[1, 2]

[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, п. Паратунка, ул. Мирная, 7

[2] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: gvodinchar@ikir.ru, anna_antonenko@mail.ru, olga.v.sheremetyeva@gmail.com

В работе исследуется вопрос о возможности возникновения инверсий в рамках маломодовой модели динамо. Рассмотрены условия, при которых возможны более частые инверсии магнитного поля по сравнению с инверсиями в поле скоростей вязкой проводящей замагниченной жидкости.

Ключевые слова: маломодовая модель, метод Галёркина, магнитные инверсии

MATHEMATICAL MODELING

MSC 35C05

MODELING INVERSIONS WITHIN LOW-MODE MODEL OF LARGE-SCALE DYNAMO

G.M. Vodinchar[1, 2], A.N. Godomskaya[1], O.V. Sheremetyeva[1, 2]

[1] Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

[2] Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: gvodinchar@ikir.ru, anna_antonenko@mail.ru, olga.v.sheremetyeva@gmail.com

In this paper we investigate the question of the possibility of inversions within the low-mode dynamo model. The conditions under which the possibility of more frequent reversal of the magnetic field in comparison with inversions in the velocity field of a viscous conducting magnetized fluid.

Key words: low-mode model, the Galerkin method, magnetic inversion

Введение

Будем рассматривать движение несжимаемой вязкой проводящей замагниченной жидкости в системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси Oz и находящейся в поле внешних сил с массовой плотностью $\mathbf{f}$. Физические параметры жидкости считаем неизменными. Магнитогидродинамические (МГД) уравнения включают уравнение Навье-Стокса, уравнение индукции для магнитного поля $\mathbf{B}$, уравнение неразрывности и условие соленоидальности поля $\mathbf{B}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} + 2\Omega\times\mathbf{v} + \blacksquare\times(\Omega\times\mathbf{r}) = \nu\Delta\mathbf{v} - \dfrac{1}{\rho}\nabla P + \dfrac{1}{\rho\mu}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \mathbf{f}, \\ \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \nu_m \triangle \mathbf{B}, \\ \nabla\mathbf{v} = \nabla\mathbf{B} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{v}$ – скорость, P – давление, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость, ν_m – магнитная вязкость, μ – магнитная проницаемость.

Поскольку при постоянной угловой скорости Ω ускорение центробежной силы представимо в следующем виде $\Omega\times(\Omega\times\mathbf{r}) = -\dfrac{1}{2}\nabla(\Omega\times\mathbf{r})^2$, то его можно объединить вместе с давлением в одно потенциальное слагаемое $\dfrac{1}{\rho}\nabla p'$, где редуцированное давление будет задаваться выражением $p' = p + \dfrac{1}{2}\rho\nabla(\Omega\times\mathbf{r})^2$.

Введем характерные величины скорости U, линейного размера области L, времени L/U, давления ρU^2, магнитной индукции $L\sqrt{\rho\mu}/U$. Тогда в безразмерных переменных система (1) запишется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = \mathrm{R}^{-1}\Delta\mathbf{v} - \nabla p' - 2\varepsilon^{-1}(\mathbf{e}_z\times\mathbf{v}) + (\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \mathbf{f}, \\ \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \mathrm{R}_m^{-1} \triangle \mathbf{B}, \\ \nabla\mathbf{v} = \nabla\mathbf{B} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где безразмерные параметры $R = UL/\nu$ – число Рейнольдса, $\varepsilon = U/(\Omega L)$ – число Россби, $R_m = UL/\nu_m$ – магнитное число Рейнольдса.

Система (2) должна дополняться граничными условиями для скорости и магнитного поля. Вид граничных условий не существенен для настоящей работы, поэтому мы их не конкретизируем. Будем лишь предполагать, что эти условия линейные однородные.

Одним из подходов к изучению системы (2) является построение маломодовых приближений галёркинского типа [1]. Отметим, что различные варианты механизма динамо едины в том, что источником для тороидальной (полоидальной) компоненты поля $\mathbf{B}$ является нелинейное взаимодействие полоидальной (тороидальной) компоненты этого же поля с жидким потоком [2, 3]. В связи с этим представляется, что предельным возможным усечением, сохраняющим работу динамо, будет случай трех мод – одной гидродинамической, одной тороидальной магнитной, одной полоидальной магнитной.

Рассмотрим вопрос о выборе единственной гидродинамической моды. Если для поля скорости использовать представление $\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = u(t)\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ и строить галёркинское приближение для первого из уравнений системы (2), то кориолисов член приближения равен нулю

$$\varepsilon^{-1}u(t)\int(\mathbf{e}_z\times\mathbf{v_0})\,\mathbf{v_0}dV=0.$$

Таким образом, из получаемого приближения исчезнет информация о вращении жидкого объема. В связи с этим, единственный, по мнению авторов, способ сохранить информацию о вращении в одномодовом приближении скорости – это использовать в качестве моды одну из собственных мод свободных колебаний вязкой вращающейся жидкости. Тогда информация о вращении будет заложена в самой форме линий тока рассматриваемой моды и мнимой части её собственного значения [4]. Действительная же часть этого собственного значения будет определять время вязкой диссипации моды.

При выбранном способе обезразмеривания такие моды определяются из решения спектральной задачи

$$\begin{aligned}&\Lambda \mathrm{R}^{-1}\mathbf{v}+\mathrm{R}^{-1}\Delta\mathbf{v}-\nabla p'-2\varepsilon^{-1}(\mathbf{e}_z\times\mathbf{v})=\mathbf{0},\\&\nabla\mathbf{v}=0.\end{aligned}\tag{3}$$

Эта спектральная задача должна замыкаться теми же граничными условиями для скорости, что и система (2).

С математической точки зрения в этой задаче слагаемое $\nabla p'$ является оператором проектирования дивергентного поля $2\varepsilon^{-1}(\mathbf{e}_z\times\mathbf{v})$ в подпространство соленоидальных полей. Ясно также, что задача однопараметрическая и определяется отношением R/ε – числом Кориолиса (обратным числом Экмана).

Поскольку спектр задачи (3) комплексный, собственные моды также являются комплексными полями. Поэтому при построении маломодового приближения возникает необходимость рассматривать комплексные моды скорости и их комплексные амплитуды. Отметим также, что если пара $(\Lambda_0,\mathbf{v}_0)$ является одним из решений задачи (3), то и пара $(\Lambda_0^*,\mathbf{v}_0^*)$ также будет её решением. Здесь и далее звездочка $(*)$ обозначает комплексное сопряжение. Для представления магнитного поля используем вещественные моды и их амплитуды. Таким образом, используем следующие представления вещественных полей в задаче (2):

$$\begin{aligned}&\mathbf{v}(\mathbf{r},t)=u(t)\mathbf{v}_0(\mathbf{r})+u^*(t)\mathbf{v}_0^*(\mathbf{r}),\\&\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=B_1(t)\mathbf{b}_1(\mathbf{r})+B_2(t)\mathbf{b}_2(\mathbf{r}),\end{aligned}\tag{4}$$

где $\mathbf{b}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{b}_2(\mathbf{r})$ – некоторые тороидальная и полоидальная магнитные моды, соответственно.

Введем скалярное произведение комплексных векторных полей формулой

$$\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle=\int_D\mathbf{p}\mathbf{q}^*dV,$$

где интегрирование ведется по объему области D. Будем считать далее, что все рассматриваемые моды нормированы в смысле нормы этого скалярного произведения.

Галёркинское приближение для системы (2), использующее разложение (4), имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = C_{11}u^2 + C_{12}uu^* + C_{22}u^{*2} - \mathrm{R}^{-1}\Lambda_0 u + L_{11}B_1^2 + L_{12}B_1B_2 + L_{22}B_2^2 + F, \\ \dfrac{dB_1}{dt} = W_{11}uB_1 + W_{11}^*u^*B_1 + W_{12}uB_2 + W_{12}^*u^*B_2 - \mathrm{R}_m^{-1}\mu_1 B_1, \\ \dfrac{dB_2}{dt} = W_{21}uB_1 + W_{21}^*u^*B_1 + W_{22}uB_2 + W_{22}^*u^*B_2 - \mathrm{R}_m^{-1}\mu_2 B_2, \end{cases} \tag{5}$$

где коэффициенты C_{ij}, L_{ij}, F, W_{ij}, μ_i – в общем случае комплексные числа, являющиеся следующими скалярными произведениями векторных полей:

$$\begin{aligned} &C_{11} = -\left\langle (\mathbf{v}_0\nabla)\,\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \right\rangle, \\ &C_{12} = -\left\langle (\mathbf{v}_0\nabla)\,\mathbf{v}_0^*, \mathbf{v}_0 \right\rangle - \left\langle \left(\mathbf{v}_0^*\nabla\right)\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \right\rangle, \\ &C_{22} = -\left\langle \left(\mathbf{v}_0^*\nabla\right)\mathbf{v}_0^*, \mathbf{v}_0 \right\rangle, \\ &L_{11} = \left\langle (\nabla\times\mathbf{b}_1)\,\mathbf{b}_1, \mathbf{v}_0 \right\rangle, \\ &L_{12} = \left\langle (\nabla\times\mathbf{b}_1)\,\mathbf{b}_2, \mathbf{v}_0 \right\rangle + \left\langle (\nabla\times\mathbf{b}_2)\,\mathbf{b}_1, \mathbf{v}_0 \right\rangle, \\ &L_{22} = \left\langle (\nabla\times\mathbf{b}_2)\,\mathbf{b}_2, \mathbf{v}_0 \right\rangle, \\ &F = \left\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_0 \right\rangle, \\ &W_{ij} = \left\langle \nabla\times\left(\mathbf{v}_0\times\mathbf{b}_j\right), \mathbf{b}_i \right\rangle, \\ &\mu_1 = -\left\langle \Delta\mathbf{b}_T, \mathbf{b}_T \right\rangle > 0, \quad \mu_2 = -\left\langle \Delta\mathbf{b}_P, \mathbf{b}_P \right\rangle > 0, \end{aligned} \tag{6}$$

При записи системы (5) мы учитывали [5], что подпространства тороидальных и полоидальных полей инвариантны относительно оператора Лапласа, ортогональность тороидальных и полоидальных полей, а также положительность оператора Лапласа.

Будем предполагать, что магнитные моды таковы, что обеспечивают взаимную генерацию друг друга, не генерируя при этом самих себя. Математически это означает, что коэффициенты $W_{ii} = 0$, и тогда уравнения (5) примут вид:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = C_{11}u^2 + C_{12}uu^* + C_{22}u^{*2} - \mathrm{R}^{-1}\Lambda_0 u + L_{11}B_1^2 + L_{12}B_1B_2 + L_{22}B_2^2 + F, \\ \dfrac{dB_1}{dt} = (W_{12}u + W_{12}^*u^*)\,B_2 - \mathrm{R}_m^{-1}\mu_1 B_1, \\ \dfrac{dB_2}{dt} = (W_{21}u + W_{21}^*u^*)\,B_1 - \mathrm{R}_m^{-1}\mu_2 B_2, \end{cases} \tag{7}$$

Исследование системы МГД уравнений в маломодовом приближении галёркинского типа на наличие инверсий

Инверсия в любом рассматриваемом поле выражается в смене знака у соответствующей моды и задача по определению условий и параметров, при которых происходит инверсия магнитного поля на фоне отсутствия инверсий в поле скоростей вязкой несжимаемой жидкости, сводится к подбору таких коэффициентов в системе

(7), чтобы на достаточно длительных промежутках времени знакопостоянства мод $u(t)$ и $u^*(t)$ достаточно часто изменялся бы знак у мод $B_1(t)$ и $B_2(t)$.

С целью упрощения преобразований, производимых в ходе исследования, в системе (7) ведём переобозначения коэффициентов $\Lambda = \mathrm{R}^{-1}\Lambda_0$, $\mu_1 = \mathrm{R}_m^{-1}\mu_1$, $\mu_2 = \mathrm{R}_m^{-1}\mu_2$ и запишем её в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = C_{11}u^2 + C_{12}uu^* + C_{22}u^{*2} - \Lambda u + L_{11}B_1^2 + L_{12}B_1B_2 + L_{22}B_2^2 + F, \\ \dfrac{dB_1}{dt} = (W_{12}u + W_{12}^*u^*)B_2 - \mu_1 B_1, \\ \dfrac{dB_2}{dt} = (W_{21}u + W_{21}^*u^*)B_1 - \mu_2 B_2, \end{cases} \tag{8}$$

Исследуем параметры, полученной системы (8), при которых возможна инверсия магнитного поля в условиях относительного постоянства поля скоростей.

Зафиксируем значения мод $u(t)$ и $u^*(t)$ и из системы дифференциальных уравнений, образованной двумя последними уравнениями из (8), определим при каких условиях могут возникнуть изменения знака у мод $B_1(t)$ и $B_2(t)$, т. е. инверсии в магнитном поле:

$$\begin{cases} \dfrac{dB_1}{dt} = (W_{12}u + W_{12}^*u^*)B_2 - \mu_1 B_1, \\ \dfrac{dB_2}{dt} = (W_{21}u + W_{21}^*u^*)B_1 - \mu_2 B_2. \end{cases} \tag{9}$$

В системе (9) осцилляции могут возникнуть лишь в случае, когда решение имеет вид

$$B_i(t) = \alpha_i e^{k_i t}, \ k_i \in \mathbb{C}, \tag{10}$$

где k_i является комплексным корнем характеристического уравнения системы (9):

$$\begin{vmatrix} -\mu_1 - k & W_{12}u + W_{12}^*u^* \\ W_{21}u + W_{21}^*u^* & -\mu_2 - k \end{vmatrix} = 0$$

с отрицательным дискриминантом

$$D = (\mu_2 - \mu_1)^2 + 16\Re(W_{12}u)\Re(W_{21}u) < 0 \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} u &= \Re(u) + i\Im(u), \\ u^* &= \Re(u) - i\Im(u), \\ W_{12} &= \Re(W_{12}) + i\Im(W_{12}), \\ W_{12}^* &= \Re(W_{12}) - i\Im(W_{12}), \\ W_{21} &= \Re(W_{21}) + i\Im(W_{21}), \\ W_{21}^* &= \Re(W_{21}) - i\Im(W_{21}). \end{aligned}$$

Исходя из условия (11), область значений моды $u(t)$ на комплексной плоскости – это область, ограниченная линией гиперболического типа с центорм симметрии в начале координат. Для любого значения $u(t)$ из заданной области значения мод $B_1(t)$ и $B_2(t)$ в общем случае могут быть выбраны произвольно, что следует из вида решения (10). Будем задавать значения мод $B_1(t)$ и $B_2(t)$, так чтобы выполнялось равенство $B(t) = \sqrt{B_1^2(t) + B_2^2(t)} = 1$, что позволит исследовать взаимное изменение значений мод $B_1(t)$ и $B_2(t)$, а также изменение значений амплитуды $B(t)$.

Если в системе (8) не учитывать диссипативные члены (Λu, $\mu_1 B_1$, $\mu_2 B_2$) и внешние воздействия (F), то процесс взаимной генерации полей будет незатухающим (рис.1). Исключение только внешнего воздействия из системы (8) в зависимости от значений параметров, входящих в уравнения, приводит либо к затуханию процесса (рис.2), либо к незатухающему процессу (рис.3).

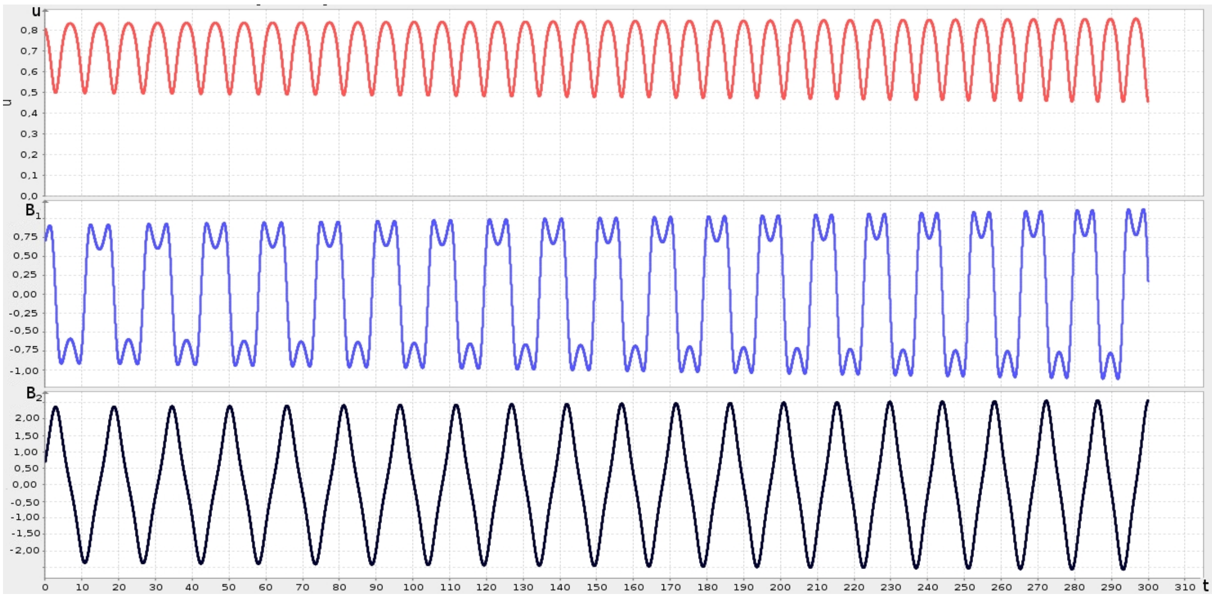

Рис. 1. Визуализация численного решения системы (8) без учёта диссипативных членов и внешних воздействий ($\lambda = 10^{-3}$, $\mu = 4$)

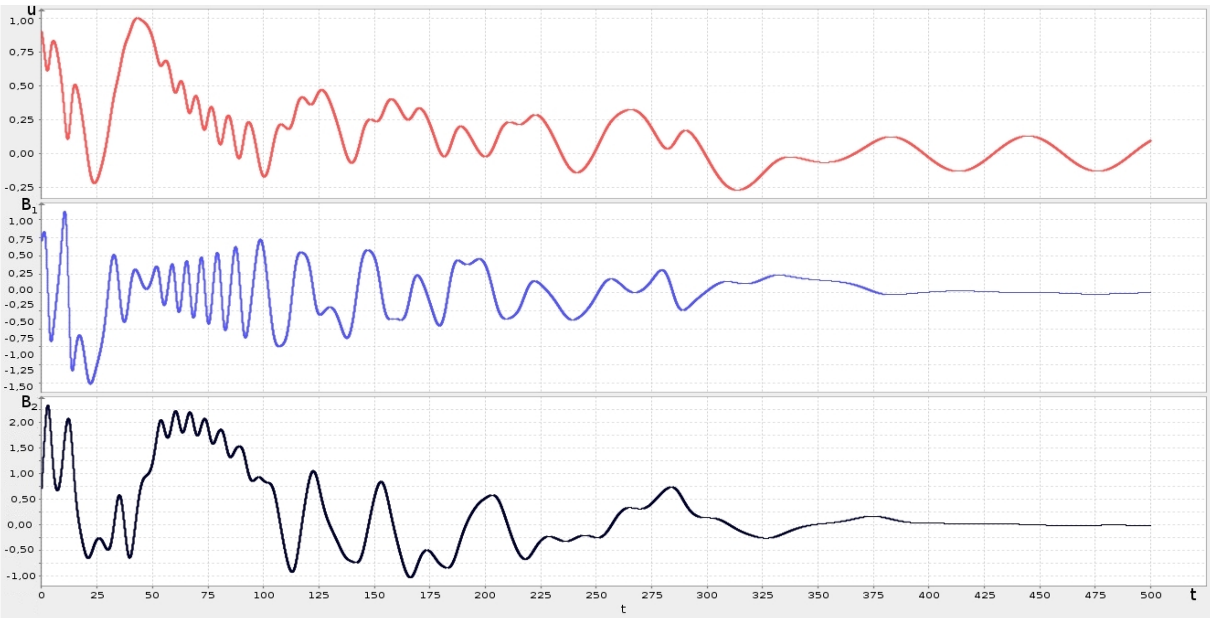

Рис. 2. Визуализация численного решения системы (8) без учёта внешних воздействий ($\lambda = 10^{-6}$, $\mu = 10^{-2}$)

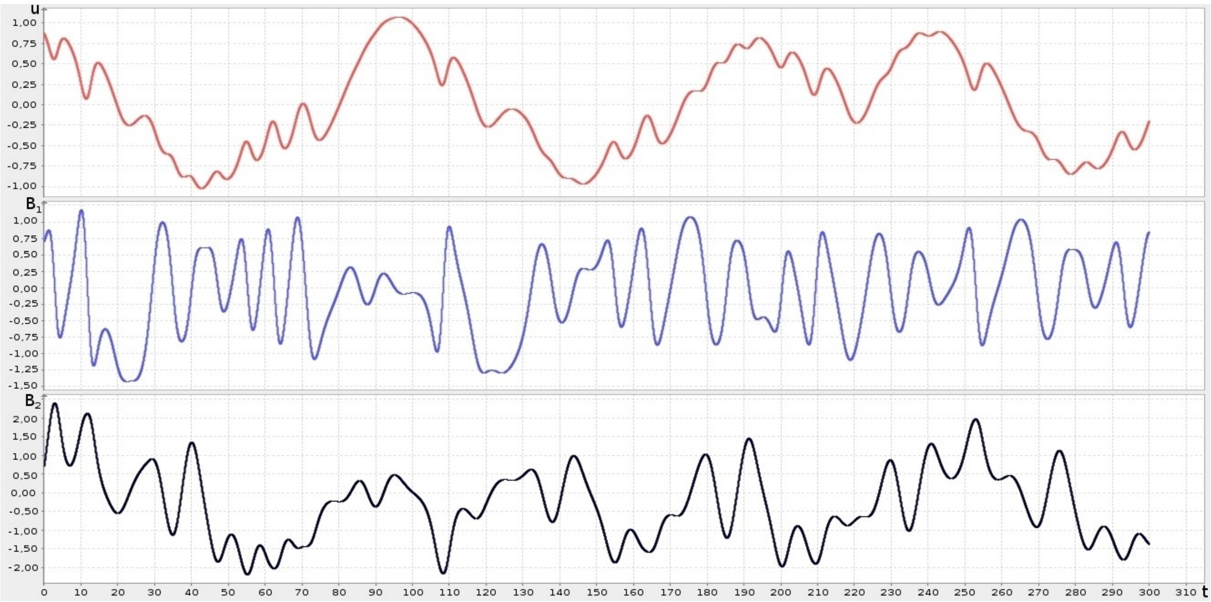

Рис. 3. Визуализация численного решения системы (8) без учёта внешних воздействий ($\lambda = 10^{-7}$, $\mu = 10^{-3}$)

Заключение

Система МГД уравнений галёркинского типа в маломодовом приближении (8), где не учитываются внешние воздействия, при различных значениях входящих параметров содержит численные решения с инверсиями как в магнитном поле, так и в поле скоростей вязкой жидкости, причём присутствуют не только случаи затухания полей, но и их незатухающая взаимная генерация, что говорит об адекватности описания процессов протекающих в ядре Земли в рамках маломодовой модели.

Библиографический список

1. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. – М.: Наука, 1981. 368 с.

2. Zeldovich Ya.B., Rusmaikin A.A., Sokoloff D.D. Magnetic fields in astrophysics. The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics. New York: Gordon and Breach, 1983.

3. Krause F., Rädler K.H. Mean-filed magnetohydrodynamics and dynamo theory. Pergamon Press, 1980.

4. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. 304 с.

5. Chandrasekhar S. Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability. N.Y.: Dover Publ. Inc., 1981. 654 p.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 05.11.2014