Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2014. № 2(9). C. 17-22. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2014-9-2-17-22

УДК 517.953

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А.В. Юлдашева

Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. ВУЗ городок

E-mail: yuasv86@mail.ru

В статье рассматривается некорректная задача для уравнения высокого четного порядка. Доказывается однозначная разрешимость при дополнительных условиях и условиях на область.

Ключевые слова: уравнения в частных производных высокого порядка, некорректная задача, метод разделения переменных, цепные дроби.

MSC 35C05

ON ONE PROBLE FOR HIGHER-ORDER EQUATION

A.V. Yuldasheva

National University of Uzbekistan by Mirzo Ulugbeka, 100174, Uzbekistan, Tashkent c., VUZ gorodok st.

E-mail: yuasv86@mail.ru

In this paper not well posed problem for the even-order equation is studied. The stability of the problem is restored by additional conditions and conditions to domain.

Key words: partial differential equations of higher order, not well posed problem, method of separation of variables, simple continued fractions.

Постановка задачи

В настоящей работе для уравнения

$$\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}-\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}=0,\quad k=2n+1,\, n\in N, \tag{1}$$

в области $D=\{(x,t):0\leq x\leq\pi,0\leq t\leq 2\pi\}$ рассматривается задача со следующими условиями:

$$\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}(0,t)=\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}(\pi,t)=0,\quad m=0,1,...,k-1,\quad 0\leq t\leq 2\pi, \tag{2}$$

$$u(\alpha\pi,t)=f(t),\quad 0\leq t\leq 2\pi, \tag{3}$$

где α некоторая постоянная из $(0,1)$и $f(t)$—заданная достаточно гладкая функция.

Мы покажем, что если α иррациональное число, то в классе $u\in C^{2k,2}_{x,t}(D)$справедлива теорема единственности решения задачи (1)-(3).

Отметим, что данная задача некорректна, так как малое изменение функции $f(t)$ в норме $C^{s}(s\in N)$ может вызвать сколь угодно большое изменение решения u в норме L_2.

Регуляризировать эту задачу можно с помощью дополнительного условия, к примеру с помощью задания априорной оценки

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^{k}u}{\partial x^{k}}\right)^2 dtdx\leq E^2,\quad 0\leq t\leq 2\pi, \tag{4}$$

где E заданная постоянная.

О корректности задачи

Предположим, что существует функция $u\in C^{2k,2}_{x,t}(D)$ удовлетворяющая условиям (1)-(3), тогда u можно представить в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\left(a_n\cos n^k t+b_n\sin n^k t\right), \tag{5}$$

а из этого представления следует, что функция $f(t)$ должна иметь вид

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\alpha\pi\left(a_n\cos n^k t+b_n\sin n^k t\right). \tag{6}$$

Теорема 1. *Если α иррациональное число, то задача (1)-(3) имеет не более одного решения $u\in C^{2k,2}_{x,t}(D)$.*

Доказательство. Действительно, если в (6) $f\equiv 0$, тогда $a_n=b_n=0$. Следовательно, и $u\equiv 0$. □

Замечание. Если α рациональное число, то единственности нет.

Например, пусть q некоторое натуральное число, тогда функция $u(x,t)=\sin qx\cos q^k t$ удовлетворяет (1), (2) и

$$u(\frac{\pi}{q},t)=0, \quad 0\le t\le 2\pi.$$

Определение. Будем говорить, что иррациональное число α имеет порядок Ω, если Ω - это верхняя граница чисел ω, удовлетворяющих неравенство

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\frac{1}{q^{1+\omega}} \quad ,$$

для любых $\frac{p}{q}\in Q$. Известно, что почти все числа α имеют порядок $\Omega=1$ [3, **?**].

Следующее утверждение связано с вопросом об устойчивости решения в зависимости от α и f. Например.

Теорема 2. *Пусть α иррациональное число. Тогда существует последовательность 2π – периодических функций $f_n\in C^\infty(R)$, равномерно стремящаяся к нулю и такая, что для функций $u_n\in C^{2k,2}_{x,t}(D)$, удовлетворяющих (1), (2) и*

$$u_n(\alpha\pi,t)=f_n(t), \tag{7}$$

выполняется соотношение

$$\lim_{\to\infty}\|u_n\|_{L_2(D)}=+\infty. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть

$$f_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n^k}}\sin n^k t,$$

тогда

$$u_n(x,t)=\left(\sqrt{n^k}\sin n\alpha\pi\right)^{-1}\sin n^k t\sin nx.$$

Известно, что [2] существует последовательность целых чисел p_n,q_n таких, что

$$\lim_{n\to\infty}q_n=+\infty, \qquad \left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}$$

и тогда из следующей оценки следует утверждение теоремы

$$|\sin q_n\alpha\pi|=|\sin(q_n\alpha-p_n)\pi|<\frac{\pi}{q_n}.$$

Заметим, что для любого данного целого s существует иррациональное число α (например, порядка $s+2$) такое, что решение

$$u_n(x,t)=n^{-1-s}(\sin n\alpha\pi)^{-1}\sin n^k t\cdot\sin nx$$

задачи (1), (2) и $u_n(\alpha\pi,t)=n^{-1-s}\sin n^k t$ удовлетворяет следующей оценке

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{L_2(D)}=+\infty \quad \lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{C^s(D)}=0,$$

из которой видно, что задача некорректна. □

Сейчас, мы покажем, что задача также неустойчива относительно α.

Теорема 3. *Пусть* $p,q \in N, p< q$ $\{\alpha_n\}$ *последовательность иррациональных чисел сходящихся к* $\frac{p}{q}$. *И пусть* $u_n \in C^{2k,2}_{x,t}(D)$ *решение задачи (1), (2) и* $u_n(\alpha\pi,t) = \sin q^k t$, *тогда*

$$\lim_{\to\infty} \|u_n\|_{L_2(D)} = +\infty.$$

Решение запишем в виде $u_n(x,t) = \frac{\sin q^k t \cdot \sin qx}{\sin q\alpha_n \pi}$, *откуда очевидно утверждение теоремы.*

Поэтому необходимо дополнительное условие

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2 dt dx \le E^2.$$

Задача с ограниченным решением

Пусть α, ε, E некоторые положительные константы, причем $\alpha \in (0,1)$.

Пусть $f \in L_2(0,2\pi)$. Обозначим через $\Gamma(\varepsilon,E)$ класс функций $u \in C^{2k,2}_{x,t}(D)$ удовлетворяющих (1), (2) и

$$\|u(\alpha\pi,\cdot) - f\|_{L_2(0,2\pi)} \le \varepsilon, \tag{9}$$

$$\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|_{L_2(D)} \le E. \tag{10}$$

Условие (9) заменяет условие (3), а априорная оценка (10) необходима для корректности задачи.

Введем следующие обозначения

$$\|u\|^2 = \sup_{x\in[0,\pi]} \int\limits_0^{2\pi} u^2(x,t)dt, \tag{11}$$

$$\Delta(\varepsilon,E) = \sup_{v,w\in\Gamma(\varepsilon,E)} \|v-w\|. \tag{12}$$

Теорема 4. *Пусть* α *рациональное число,* $\alpha = \frac{p}{q}, (p,q) = 1$ *и пусть*

$$q^2 \le 2\frac{E}{\varepsilon} \quad . \tag{13}$$

Тогда

$$\Delta(\varepsilon,E) \le 3\frac{E}{q^k}. \tag{14}$$

Если же $q = \left[\left(\frac{2E}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}}\right]$, *тогда*

$$\Delta(\varepsilon,E) \le 3\sqrt{E}\sqrt{\varepsilon}.$$

Доказательство. Пусть $v, w \in \Gamma(\varepsilon, E)$, тогда $u = v - w \in C^{2k,2}_{x,t}(D)$ удовлетворяет (1), (2) и

$$\|u(\alpha\pi, \cdot)\|_{L_2(0,2\pi)} \leq 2\varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|_{L_2(D)} \leq 2E. \tag{15}$$

В силу представления u в виде (5), перепишем условия (15) следующим образом

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)\sin^2 n\frac{p}{q}\pi \leq \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}, \tag{16}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2k}(a_n^2+b_n^2) \leq \frac{8E^2}{\pi^2} \quad , \tag{17}$$

откуда следует

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin^2 n\frac{p}{q}\pi + n^{2k}\frac{\varepsilon^2}{E^2}\right)(a_n^2+b_n^2) \leq \frac{8\varepsilon^2}{\pi}. \tag{18}$$

Из (5) имеем

$$\|u\|^2 = \pi \max_{x\in[0,\pi]}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)\sin^2 nx \leq \pi\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Из (12) следует

$$\Delta^2(\varepsilon, E) \leq \pi \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2) : a_n, b_n\right\},$$

удовлетворяющие (18).

Согласно правилу множителей Лагранжа, находим

$$\Delta^2(\varepsilon, E) \leq 8\varepsilon^2 \min(\sin^2 r\frac{p}{q}\pi + r^{2k}\frac{\varepsilon^2}{E^2})^{-1}, \quad r \in N. \tag{19}$$

Из (13) имеем

$$\sin^2 r\frac{p}{q}\pi + r^{2k}\frac{\varepsilon^2}{E^2} \geq \frac{\varepsilon^2}{E^2}q^{2k}, \quad 1 \leq r \leq q.$$

Подставляя эту оценку в (19) получим (14). Теорема доказана. □

Предположим теперь, что α иррациональное число, разлагаемое в цепную дробь

$$\alpha = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \ldots}} \quad .$$

Теорема 5. *$\alpha \in (0,1)$ иррациональное число и пусть $\alpha_i \leq K_\alpha$,*

$$\Delta(\varepsilon, E) \leq 3\left(\frac{K_\alpha+2}{2}\varepsilon E\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Доказательство. Для того, чтобы убедиться в справедливости данной оценки, заметим, что из теоремы 4 следует, что для $\Delta(\varepsilon, E)$ верна оценка (19), тогда из условия, что $\alpha_i \leq K_\alpha$ [3], получаем

$$\sin^2 r\alpha\pi \geq \frac{27}{4(K_\alpha+2)^2 r^2}, \; r \geq 1.$$

Тогда

$$\min_{r\in N}\left\{\frac{27}{4\left(K_{\alpha}+2\right)^{2}r^{2}}+r^{2k}\frac{\varepsilon^{2}}{E^{2}}\right\}\geq\frac{\varepsilon}{E}\frac{\sqrt{27}}{\left(K_{\alpha}+2\right)}.$$

Отсюда следует требуемая оценка

$$\Delta^{2}\left(\varepsilon,E\right)\leq 9\varepsilon E\left(\frac{K_{\alpha}+2}{2}\right).$$

□

Библиографический список

1. Frosali G. Papi. On the stability of the Dirichlet problem for the vibrating string equation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1979. V.6. P. 719-728.
2. Юлдашева А.В. Об одной задаче для уравнения высокого порядка // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2012. № 5. С. 11-14.
3. Хинчин А.Я. Цепные дроби. Л.: ФМ, 1961. 112 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 23.10.2014