Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2014. № 2(9). C. 11-16. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2014-9-2-11-16

УДК 517.23

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ОТ ФУНКЦИИ ПО ДРУГОЙ ФУНКЦИИ

А.С. Нишонбоев

Ферганский государственный университет, 150100, Узбекистан, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19

E-mail: azizbek.nishoboev@mail.ru

Доказываются важные леммы для оператора дробного интегро-дифференцирования от функции по другой функции.

Ключевые слова: функция Гаусса, функция Мейера, преобразование Меллина

MSC 34L40

CERTAIN PROPERTIES OF FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION OPERATOR OF FUNCTIONS IN OTHER FEATURES

A.S. Nishonboev

Fergana State University, 150100, Uzbekistan, Fergana c., Murabbiylar st., 19

E-mail: azizbek.nishoboev@mail.ru

Prove an important lemma for the operator of fractional integro-differentiation of functions of other functions.

Key words: Gaussian function, the function Meyer, Mellin transform

Примем обозначения

$$D^{l}_{a,g(x)}\phi\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(-l)}\int\limits_{a}^{x}\left[g\left(x\right)-g\left(t\right)\right]^{-l-1}\phi\left(t\right)g'\left(t\right)dt, & l<0\\ \phi(x), & l=0\\ \frac{d^{n+1}}{d[g(x)]^{n+1}}D^{l-(n+1)}_{0g(x)}\phi(x), & l>0\end{cases} \tag{1}$$

$$F_{0,g(x)}\begin{bmatrix} a\ b\\ e\ x\end{bmatrix}\phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(-l)}\int\limits_{a}^{x}\left[g\left(x\right)-g\left(t\right)\right]^{-l-1}F(a,b,c;\frac{g(x)-g(t)}{g(x)})\phi\left(t\right)g\left(t\right)'dt, l<0\\ \phi\left(x\right), l=0\\ \left[g\left(x\right)\right]^{b}\big]\frac{d^{n+1}}{d[g(x)]^{n+1}}[g(x)]^{-b}F_{0,g(x)}\begin{bmatrix} a+b+1, & b\\ l-n-1, & x\end{bmatrix}\phi(x), l>0\end{cases} \tag{2}$$

где a, b и l – любые действительные числа; n – целая часть l; $\Gamma(x)$ – гамма-функция; $F[\ldots]$ – гипергеометрическая функция Гаусса [1].

Имеет место

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x)\in L(0,1)$, $l_1+l_3<0$, $l_3<0$. Тогда почти всюду на (0,1) выполняется соотношение*

$$D^{l_1}_{0x^2}D^{l_3}_{0x}\phi\left(x\right)=2^{l_3}\cdot x^{l_3+1}F_{0x^2}\begin{bmatrix}-\frac{1+l_3}{2}, & -l_1-\frac{l_3}{2}\\ -l_1-l_3, & x\end{bmatrix}\frac{\phi\left(x\right)}{x}. \tag{3}$$

Здесь l_1, l_3 - заданные действительные числа;

Доказательство. Рассмотрим случай. Когда $l_1<0$, $l_3<0$.

В силу определения (1) имеем

$$D^{l_1}_{0x^2}D^{l_2}_{0x}\phi\left(x\right)=\frac{x^{-l_1}}{\Gamma\left(-l_1\right)\Gamma\left(-l_3\right)}\int\limits_{0}^{x}(x^2-t^2)^{-l_1-1}dt^2\int\limits_{0}^{t}(t-y)^{-l_3-1}\phi\left(y\right)dy. \tag{4}$$

После некоторых преобразований из (4), получим

$$I=D^{l_1}_{0x^2}D^{l_3}_{0x}\phi\left(\sqrt{x}\right)=\frac{x^{-l_1}}{\Gamma\left(-l_1\right)\Gamma\left(-l_3\right)}\int\limits_{0}^{x}(x-t)^{-l_1-1}dt\int\limits_{0}^{t}(\sqrt{t}-\sqrt{y})^{-l_3-1}\phi\left(\sqrt{y}\right)d\sqrt{y}. \tag{5}$$

Менял порядок интегрирования, из (5) находим

$$I=\int\limits_{0}^{x}\phi(y)d\sqrt{y}\int\limits_{y}^{x}(x-t)^{-l_1-1}(\sqrt{t}-\sqrt{y})^{-l_3-1}dt, \tag{6}$$

Произведя замену $t=xz$ из (6), получим

$$I=\frac{x^{-l_1}}{\Gamma\left(-l_1\right)\Gamma\left(-l_3\right)}\int\limits_{0}^{x}(\sqrt{y})^{-l_3-1}\phi(y)K(\sigma)d\sqrt{y}, \tag{7}$$

где

$$K\left(\sigma\right)=\int\limits_{0}^{\infty}K_1\left(\sqrt{\sigma z}\right)K_2\left(z\right)dz, \tag{8}$$

$$K_1(z) = (z-1)_+^{-l_3-1}, \quad K_2(z) = (1-z)_+^{-l_1-1}, \tag{9}$$

$$\sigma = \frac{x}{y}, \quad z_+^l = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ z^l, & z > 0 \end{cases}.$$

Для вычисления интеграла (8) воспользуемся преобразованием Меллина [1]

$$f*(s) = M\{f(x);s\} = \int\limits_0^\infty f(x)\,x^{s-1}dx. \tag{10}$$

Тогда учитывая соотношение [3]

$$M\left\{x^{\delta_1}\int\limits_0^\infty \xi^{\delta_2} g_1(x\xi)\,g_2(\xi)\,d\xi;s\right\} = g_1^*(s+\delta_1)\,g_2^*(1-\delta_1+\delta_2-s), \tag{11}$$

получим

$$M\{K(\sigma);s\} = K^*(s)K_1^*(s)\,K_2^*(1-s). \tag{12}$$

Далее в силу формулы [3]

$$M\left\{(x-1)_+^{c-1};s\right\} = \Gamma(c)\,\Gamma\begin{bmatrix} 1-c-s \\ 1-s \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Re}c > 0, \quad \mathrm{Re}s < 1-\mathrm{Re}c. \tag{13}$$

$$M\{f(x^p)\} = \frac{1}{p}f*\left(\frac{s}{p}\right), \quad p \ne 0, \tag{14}$$

$$M\left\{(1-x)_+^{c-1};s\right\} = \Gamma(c)\,\Gamma\begin{bmatrix} s \\ s+c \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Re}c > 0, \quad \mathrm{Re}s > 0 \tag{15}$$

Находим

$$K_1*(s) = 2\Gamma(-l_3)\Gamma\begin{bmatrix} 1+l_3-2s \\ 1-2s \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Re}l_3 < 0, \quad 2\mathrm{Re}s < 1+l_3, \tag{16}$$

и

$$K_2*(s) = \Gamma(-l_1)\Gamma\begin{bmatrix} s \\ s-l_1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Re}l_1 < 0, \quad \mathrm{Re}s > 0, \tag{17}$$

Подставляя (16), (17) в (12) получим

$$K*(s) = 2\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)\Gamma\begin{bmatrix} 1+l_3-2s & 1-s \\ 1-2s & 1-l_1-s \end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$\mathrm{Re}l_1 < 0, \quad \mathrm{Re}l_3 < 0, \quad 2\mathrm{Re}s < 1+l_3, \quad \mathrm{Re}s < 1.$$

Отсюда, применяя формулу [2]

$$\Gamma(2a) = 2^{2a-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(a)\,\Gamma(a+1/2), \tag{19}$$

из (18) имеем

$$K*(s) = 2^{l_3+1}\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)\Gamma\begin{bmatrix} \frac{1+l_3}{2}-s & \frac{2+l_3}{2}-s \\ 1-l_1-s & \frac{1}{2}-s \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$\mathrm{Re} l_1 < 0, \quad \mathrm{Re} l_3 < 0, \quad 2\mathrm{Re} s < 1 + l_3, \quad 2\mathrm{Re} s < 2 + l_3.$$

В силу формулы [3]

$$M\left\{(x-1)_+^{c-1} F(a,b,c;1-x);s\right\} = \Gamma(c)\Gamma\left[\begin{array}{ll} 1+a-c-\gamma-s, & 1+b-c-s \\ 1-s, & 1+a+b-c-s \end{array}\right], \tag{21}$$

$$\mathrm{Re} c > 0,\ \mathrm{Re} s < 1 + \mathrm{Re}(a-c),\ 1 + \mathrm{Re}(b-c).$$

$$M\{x^p f(x);s\} = f*(s+p), \tag{22}$$

$$F(a,b,c;z) = (1-z)^{-a} F(a,c-b,c;\frac{z}{z-1}), \tag{23}$$

из (20), получаем

$$K(\sigma) = \frac{2^{l_3+1}\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)}{\Gamma(-l_1-l_3)} x^{l_1+\frac{1+l_3}{2}} y^{\frac{l_3+1}{2}} (x-y)_+^{-l_1-l_3-1} \times \tag{24}$$

$$\times F(-\frac{1+l_3}{2}, -l_1-\frac{l_3}{2}, -l_1-l_3; \frac{x-y}{x}).$$

Подставляя (24) в (7) и после некоторых преобразований получим равенство (3).

Аналогично доказывается случай, когда $0 < l_1 < -l_3$. □

Лемма 2. *Если выполнены условия:*

$$1)\varphi(x) \in L(0,1), 2) l_1 + l_3 < 0, l_3 < 0, l_2 > -l_1,$$

то почти всюду на (0,1) справедлива формула

$$D_{0x^2}^{l_1}\left(x^2\right)^{l_2} D_{0x}^{l_3}\phi(x) = \frac{\left(x^2\right)^{l_2-l_1}}{2^{l_3}} \int_0^x y^{-l_3-1} G_{33}^{30}\left(\frac{y^2}{x^2}\,\middle|\, \begin{array}{l} 1+l_2-l_1,\ 1,\ \frac{1}{2} \\ \frac{3+l_3}{2}, \frac{2+l_3}{2}, 1+l_2 \end{array}\right)\phi(y)\,dy. \tag{25}$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $l_1 < 0$, $l_3 < 0$.

Тогда в силу определения (1) имеем

$$D_{0x^2}^{l_1}\left(x^2\right)^{l_2} D_{0x}^{l_3}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)} \int_0^x (x^2-t^2)^{-l_1-1}(t^2)^{l_2} dt^2 \int_0^t (t-y)^{-l_3-1}\phi(y)\,dy. \tag{26}$$

После некоторых преобразований из (26) находим

$$I = D_{0x}^{l_1} x^{l_2} D_{0\sqrt{x}}^{l_3}\phi(\sqrt{x}) = \tag{27}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)} \int_0^x (x-t)^{-l_1-1} t^{l_2} dt \int_0^t (\sqrt{t}-\sqrt{y})^{-l_3-1}\phi(\sqrt{y})\,d\sqrt{y}.$$

Меняя порядок интегрирования получим

$$I = \frac{1}{\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)} \int_0^x \phi(\sqrt{y})\,d\sqrt{y} \int_y^t (x-t)^{-l_1-1} t^{l_2} (\sqrt{t}-\sqrt{y})^{-l_3-1} dt. \tag{28}$$

Полагал $t = xz$ из (28) находим

$$I = \frac{1}{\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)} \int_0^x y^{-l_1-l_2-\frac{l_3+1}{2}} Q(\sigma) d\sqrt{y}. \tag{29}$$

где

$$Q(\sigma) = \sigma^{l_2-l_3} \int_0^\infty z^{l_2} f_1(\sqrt{\sigma z}) f_2(z) dz, \tag{30}$$

$$f_1(z) = (z-1)_+^{-l_3-1}; \quad f_2(z) = (1-z)_+^{-l_1-1}, \tag{31}$$

$$\sigma = \frac{x}{y}; \quad z_+^l = \begin{cases} 0, \ z \le 0 \\ z^l, \ z > 0 \end{cases}.$$

Используя формулу (11) из (30) получим

$$M\{Q(\sigma); s\} = f_1 * (s) f_2 * (1 + l_2 - s), \tag{32}$$

Далее в силу формулы (13), (14), (15) находим

$$f_1 * (s) = 2\Gamma(-l_3)\Gamma\left[\begin{array}{l} 1+l_3-2s \\ 1-2s \end{array}\right], \quad \mathrm{Re} l_3 < 0, \quad 2\mathrm{Re} s < 1 + l_3, \tag{33}$$

$$f_2 * (s) = \Gamma(-l_1)\Gamma\left[\begin{array}{l} s \\ s-l_1 \end{array}\right], \quad \mathrm{Re} l_1 < 0, \quad \mathrm{Re} s > 0, \tag{34}$$

Подставляя (33), (34) в (32) получим

$$Q * (s) = 2\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)\Gamma\left[\begin{array}{ll} 1+l_3-2s & 1+l_2-s \\ 1-2s & 1+l_2-l_1-s \end{array}\right], \tag{35}$$

$$\mathrm{Re} l_1 < 0, \quad \mathrm{Re} l_3 < 0, \quad 2\mathrm{Re} s < 1 + l_3, \quad \mathrm{Re} s < 1 + l_2.$$

На основании формулу (19) (35) имеем

$$Q * (s) = 2^{l_3+1}\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)\Gamma\left[\begin{array}{lll} \frac{1+l_3}{2}-s & \frac{2+l_3}{2}-s & 1+l_3-s \\ \frac{1}{2}-s & 1-s & 1+l_3-l_1-s \end{array}\right], \tag{36}$$

$$\mathrm{Re} l_1 < 0, \quad \mathrm{Re} l_3 < 0, \quad 2\mathrm{Re} s < 1 + l_3, \quad 2\mathrm{Re} s < 2 + l_3, \quad \mathrm{Re} s < 1 + l_2.$$

В силу формулы [2]

$$M\left\{G_{p'q'}^{m'n'}\left(z \left| \begin{array}{l} a_1, a_2, \ldots a_{p'} \\ b_1, b_2, \ldots b_{q'} \end{array}\right.\right); s\right\} =$$

$$= \Gamma\left[\begin{array}{l} s+b_1, s+b_2, \ldots s+b_{m'}, 1-a_1-s, 1-a_2-s, \ldots 1-a_{n'}-s \\ s+a_{n'+1}, s+a_{n'+2}, \ldots s+a_{p'}, 1-b_{m'+1}-s, 1-b_{m'2}-s, \ldots 1-b_{q'}-s \end{array}\right] \tag{37}$$

$$-\min_{1 \le k' \le m'} Reb_{k'} < Res < 1 - \max_{1 \le j \le n'} Rea_j, \quad p' = q' \ge 1, \quad m' + n' = p', \quad \sum_{j=1}^{n'} (a_j - b_j) > 0$$

из (35) получаем

$$Q(\sigma) = 2^{l_3} \frac{1}{\Gamma(-l_1)\Gamma(-l_3)} G_{33}^{30}\left(\frac{y}{x} \left| \begin{array}{l} -\frac{1+l_3}{2}, \ -\frac{l_1}{2}, \ -l_2 \\ l_1-l_2, \ 0, \ -\frac{1}{2} \end{array}\right.\right). \tag{38}$$

Подставляя (35) в (29) и после некоторых преобразований получим равенство (25). □

Библиографический список

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.2. М.: Наука, 1969. 344 с.

2. Маричев О.Н. Метод вычисление интегралов от специальных функций. Минск.: Наука и техника, 1978. 312 с.

3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.Н. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.: Наука и техника, 1987. 688 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 20.10.2014