Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2014. № 2(9). C. 7-10. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2014-9-2-7-10

МАТЕМАТИКА

УДК 512.24

КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫЕ ПОДГРУППЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ГРУПП

А.П. Горюшкин

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: as2021@mail.ru

Устанавливается, что конечно порожденные подгруппы бесконечного индекса в гиперболических группах, не являющихся почти абелевыми, дополняемы нетривиальным свободным множителем.

Ключевые слова: гиперболическая группа, свободное произведение, свободное произведение с объединением, порождающее множество, индекс подгруппы, нормальный делитель

MATHEMATICS

MSC 18A32

FINITE GENERATED SUBGROUPS OF HYPERBOLIC GROUPS

A.P. Goryushkin

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: as2021@mail.ru

It is proved that finite generated subgroups of infinite index of hyperbolic groups which are not quasi Abelian are complemented with a nontrivial free factor.

Key words: hyperbolic group, free product, free product with amalgamation, set of generators, index of a subgroup, normal subgroup

Подгруппа H группы G называется свободно дополняемой, если в группе G существует такая нетривиальная подгруппа Q, что подгруппа, порожденная подгруппами H, Q является их свободным произведением:$(H,Q)=H*Q$.

Понятно, что подгруппы конечной группы или абелевой группы не могут быть свободно дополняемыми. То же самое касается и подгрупп почти абелевой группы, например, бесконечной группы диэдра.

Цель работы показать, что в гиперболической группе, не являющейся почти абелевой, и заданной представлением:

$$G=< a_1,b_1,\ldots,a_n,\ b_n,\ c_1,\ldots,c_t,\ d_1,\ldots,d_s; \tag{1}$$

$$c_1^{\gamma_1},\ldots,c_t^{\gamma_t},[a_1,\ b_1]\ \ldots\ [a_n,b_n]c_1\ \ldots\ c_t,d_1\ \ldots\ d_s>,$$

где $[a_i,b_i]=a_i^{-1}b_i^{-1}a_ib_i;n,s,t\geq 0;\gamma_i>1$ – любая конечно порожденная нетривиальная подгруппа бесконечного индекса свободно дополняема.

Теорема. *Если G – дискретная группа, сохраняющих ориентацию движений гиперболической плоскости, G – не почти абелева и не изоморфна группам с представлением:*

$$< a_1,\ b_1,\ \ldots,\ a_n,\ b_n;\ ([a_1,\ b_1]\ \ldots\ [a_n,\ b_n])^k\ > < a,\ b;\ a^n,b^m(ab)^k\ >,$$

где $k>1$, H – конечно порожденная подгруппа группы G, то в G существует бесконечно порожденная подгруппа Q такая, что подгруппа, порожденная подгруппами H и Q, является свободным произведением $H*Q$.

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму о подгруппах свободного произведения с объединенной подгруппой.

Лемма. *Пусть G – свободное произведение двух групп A и B с объединенной подгруппой U, причем один из множителей является нетривиальным свободное произведением, отличным от группы диэдра, U удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, и H – конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в G. Тогда в группе G существует бесконечно порожденная подгруппа Q такая, что подгруппа, порожденная подгруппами H и Q, является свободным произведением $H*Q$.*

Доказательство. Пусть $G=A\underset{U}{*}B$ удовлетворяет условию теоремы, и H – конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в группе G.

Индекс подгруппы U в группе A бесконечен, поэтому если H окажется в сопряжении подгруппы U, то H имеет бесконечный индекс в группе A. Конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в свободном произведении, отличном от бесконечной диэдральной группы, обладает свойством свободной дополняемости (см. [1]). Более того, дополняющий множитель содержит свободную группу ранга два, и, следовательно, его можно с самого начала считать свободной группой счетного ранга.

Итак, можно считать, что H не лежит в сопряжении подгруппы U. Кроме того, бесконечность индекса $[G\colon H]$ влечет бесконечность разложения по двойному модулю $[G\colon (H,\ U)]$. Из теоремы 1.7 из [2] следует бесконечность индекса $[A\colon (U,\ U)]$.

Далее воспользуемся обозначениями из [3].

Пусть S – множество элементов из группы $A\underset{U}{*}B$, причем каноническая форма элемента s из S имеет вид

$$s=s_{1(s)}g_{2(s)}\ \cdots\ g_{n(s)}.$$

Определим множество $\bar{t}_X\ (S)$, зависящее от S и от $X(X{=}A$ или $X=B)$, по правилу:

$$\bar{t}_X\ (S)=\left\{x\in X\ \middle|\, x\equiv g_{n(s)} \bmod\ (U,\,U)\ ;\ s\in S\backslash(A\cup B)\right\}.$$

Теперь для подходящего элемента g из G множество $\bar{t}_B\ (H^g)$ пусто, а $\bar{t}_A\ (H^g)=\{Ua_0U\}$, где a_0 – любой фиксированный, наперед заданный элемент из $A\setminus U$.

Можно считать, что подгруппа H уже обладает этим свойством, то есть, что элемент gy – единичный, а элемент a_0 из $A\setminus U$ выбран таким образом, что подгруппа R,порожденная подгруппой U и элементом a_0, имеет бесконечный индекс в подгруппе A.

Для каждого элемента d из $D=A\cap H$ и каждого элемента t из $\bar{t}_A\ (H)$ произведение td снова принадлежит множеству $\bar{t}_A\ (H)$, равному по предположению Ua_0U.

Другими словами, каждый элемент d из D можно представить в виде:

$$d=u_1a_0^{-1}u_2a_0u_3,$$

где – u_1, u_2, u_3– подходящие элементы из объединяемой подгруппы U.

Отсюда следует, что D содержится в R. По теореме 1.8 из [3] найдется такая бесконечная подгруппа Q из A, что $gp(R,\,Q)=R*Q$.

Покажем теперь, что подгруппа $\bar{H}$, порожденная подгруппами H и Q, является их свободным произведением $H*Q$. Для этого нужно установить, что элемент pиз $\bar{H}$, являющийся произведением вида

$$p=p_1p_2\ \dots\ p_n, \tag{2}$$

где $n\geq 1$, а p_i – не единичные элементы, выбранные альтернативно из подгрупп Q и H, отличен от единицы.

Если все элементы p_i из (1), которые входят в H, являются одновременно и элементами из A (т. е. принадлежат пересечению D), то элемент p принадлежит свободному произведению $Q*D$, и (2) является нормальной формой элемента p относительно разложения $Q*D$.

Поэтому можно считать, что не все p_i из разложения (2) являются элементами из A. Рассмотрим тогда вместо (2) другое разложение элемента p,

$$p=q_1q_2\ \dots\ q_k, \tag{3}$$

где $1\leq k<n$, полученное из (2) некоторой группировкой множителей p_i. Точнее, элемент q_j – это некоторое p_i, если $p_i\ \in H\setminus A$, либо же q_j является произведением $p=p_\alpha\ p_{\alpha+1}\ \dots\ p_\beta$,где $1\leq\alpha<\beta\leq n$, и все множители $p_\alpha,\ p_{\alpha\,+\,1},\ \dots,\ p_\beta$ принадлежат множителю A, но элемент $p_{\alpha-1}$ (в случае, когда $\alpha>1$) и элемент $p_{\beta+1}$ (в случае, когда $\beta<n$) не принадлежат A.

Таким образом, в разложении (3) множители оказываются поочередно выбранными из $H\setminus A$ и свободного произведения $Q*R$. При этом если q_j – элемент из $Q*R$, то он не входит в свободный множитель R. Это значит, что для каждых элементов r_1, r_2 из R произведение $r_1q_{j_0}r_2$ также не принадлежит подгруппе R.

С другой стороны, если $h\ \in H\setminus A$ и $h=h_1h_2\ \dots\ h_m$ – его каноническая форма, то, так как $\bar{t}_A\ (H)\subseteq R$, получаем, что из $h_m\ \in A$ следует $h_m\ \in R$ (и из $h_1\ \in A$ следует $h_1\ \in R$).

Следовательно, каноническая форма элемента p имеет, не менее чем k слогов. Но это означает, что элемент p отличен от единицы, и, таким образом, подгруппа H_2 является свободным произведением $H*Q$.

Утверждение леммы доказано.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы.

Если в группе с представлением (1) параметр $s > 0$, то G является свободным произведением циклических групп второго порядка (а бесконечная группа диэдра почти абелева).

Если $s = 0$, представление (1) становится представлением вида

$$G =< a_1,\ b_1,\ \ldots,\ a_n,\ b_n,\ c_1,\ \ldots,\ c_t; c_1^{\gamma_1}, \ldots, c_t^{\gamma_t}, [a_1,\ b_1]\ \ldots\ [a_n,\ b_n] c_1 \ldots_t >,$$

Теперь, если $n > 0$ и $t > 1$, то группу G можно представить в виде

$$G = gp(a_1,\ b_1,\ \ldots,\ a_n,\ b_n) \underset{U}{*} gp(c_1,\ \ldots,\ c_t),$$

где $U = gp([a_1,\ b_1]\ ...\ [a_n,\ b_n]) = gp(c_t^{-1} c_{t-1}^{-1} ... c_1^{-1})$.

Аналогично и в случае $n > 1$ и $t = 0$, и тогда, когда $n = 0$, $t > 3$.

В последнем случае может оказаться, что G является свободным произведением двух групп диэдра с объединенной циклической подгруппой,

$$G =< c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_1^2, c_2^2, c_3^2, c_4^2,\ c_1 c_2 c_3 c_4 > .$$

В таком случае группа G – снова почти абелева. Действительно, циклическая подгруппа, порожденная элементом $c_1 c_2 (c_{13})^2$ имеет конечный индекс в G.

Если $s = n = 0$, $t \leq 2$, то группа G конечна.

Итак, все гиперболические группы, кроме случаев, когда в представлении (1) $s = 0, n > 0, t = 1$ или $s = 0, n = 0, t = 3$, подпадают под условия леммы.

Теорема доказана. □

Отметим, что работе [4] другими средствами получены необходимые и достаточные условия существования свободной дополняемости квазивыпуклых подгрупп бесконечного индекса в гиперболической группе.

Библиографический список

1. Горюшкин А.П. О конечно порожденных подгруппах свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой // Уч. зап. Иванов. пед. ин-та. 1972. №117. С. 11–43.
2. Горюшкин А.П. Группы, разложимые в свободное произведение (строение и применение). Саарбрюккен: Pal. Acad. Publ., 2012. 142 с.
3. Горюшкин А.П. О подгруппах почти амальгамированного произведения двух групп с конечной объединенной подгруппой // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2012. № 1(4). С. 5–10.
4. Дудкин Ф.А., Свиридов К.С. Дополнение подгруппы гиперболической группы свободным множителем // Алгебра и логика. 2013. Т. 52. № 3. С. 332–351.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 02.09.2014