Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). С. 67-76. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-67-76

# ФИЗИКА

УДК 550.385.41

## СОХРАНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО АДИАБАТИЧЕСКОГО ИНВАРИАНТА ДВИЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ ЭКВАТОРА МАГНИТНОГО ПОЛЯ СО СЛАБОЙ АКСИАЛЬНОЙ НЕСИММЕТРИЕЙ

**В.В. Богданов, А.В. Кайсин**

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, п. Паратунка, ул. Мирная, 7

E-mail: vbogd@ikir.ru

Рассматривается вопрос сохранения третьего адиабатического инварианта движения заряженных частиц с $v_{II} = 0$ (плоскость экватора) в потоковой и канонической форме в магнитных полях, обладающих слабой несимметрией. Переход к вращающейся с угловой скоростью дрейфа системе координат позволяет свести задачу к уже решенной, а именно, к задаче сохранения третьего адиабатического инварианта в аксиально-симметричном, но переменном во времени магнитном поле.

Ключевые слова: адиабатический инвариант движения, слабая несимметрия магнитного поля, дрейфовое приближение



# PHYSICS

MSC 65D15

## SAVE THE THIRD ADIABATIC INVARIANTS OF MOTION IN THE EQUATORIAL PLANE MAGNETIC FIELD WITH A WEAK AXIAL ASYMMETRY

**V.V. Bogdanov, A.V. Kaisin**

Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

E-mail: vbogd@ikir.ru

The question of preservation of the third adiabatic invariant motion of charged particles $v_{II} = 0$ (equatorial plane) in the flow and the canonical form in magnetic fields having a weak asymmetry. Go to rotating with the angular velocity of the drift coordinate system allows us to reduce the problem to have been solved, namely, the task of saving the third adiabatic invariant in the axially symmetric, but the time-varying magnetic field.

Key words: adiabatic invariant motion asymmetry weak magnetic field, drift approximation

## Введение

В работах [1]-[3] рассматривался вопрос о сохранении третьего адиабатического инварианта движения заряженной частицы в плоскости экватора аксиально-симметричного магнитного поля. Было показано, что с точностью до константы дрейфового приближенная эквивалентность канонической формы $I = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi dq \sim RU_\varphi$ и потоковой $\Phi \sim RA_\varphi$ в роли инвариантов в дрейфовом приближении обеспечивалась постоянством обобщенного импульса $P_\varphi = mRU_\varphi + (e/c)RA_\varphi$. В приведенных соотношениях приняты следующие обозначения: $p_\varphi$ и $q_\varphi$ – обобщенный импульс и соответствующая обобщенная координата; $U_\varphi$ и $A_\varphi$ — дрейфовая скорость и векторный потенциал по циклической координате $\varphi$, $R$ – радиус-вектор ведущего центра (цилиндрическая система координат). В свою очередь, постоянство третьего адиабатического инварианта в канонической $I$ и потоковой $\Phi$ формах с желаемой степенью точности выполнялось при соблюдении обычного условия адиабатической инвариантности $\frac{T_{\partial p}}{H}|\frac{dH}{dt}| \ll 1$ , где $T_{\partial p}$ – период дрейфа по координате $\varphi$. Это, как показано в [1]-[3], позволяет в дрейфовом приближении пренебречь в переменном магнитном поле как влиянием возмущающего члена $\ddot{R} = c\frac{d}{dt}\frac{E}{H}$ (радиальное ускорение) на движение частицы, так и кумулятивным эффектом этого возмущения. Следовательно, сохранение третьего инварианта в формах $I$ и $\Phi$ обеспечивалось в переменном поле возможностью считать скорость электрического дрейфа $v_E$ величиной постоянной, т.е. $v_E = \text{const}$ (в случае стационарного поля эта константа равна нулю). В этой статье будет рассмотрено в дрейфовом приближении движение заряженной частицы в плоскости экватора несимметричного магнитного поля. Будем полагать, что несимметрия ограничена только условием сохранения третьего адиабатического инварианта. Следовательно, в таких полях первый адиабатический инвариант $\mu$ есть величина заведомо постоянная ( $T_{\partial p} \gg T_л$), $T_л$ – период ларморовского вращения.

Система дрейфовых уравнений в общем виде имеет вид [4]-[6]

$$\begin{aligned} &\vec{U}_{qp} = \frac{d\vec{R}}{dt} = v_{II}\frac{\vec{H}}{H} + \frac{c}{H^2}\left[\vec{E},\vec{H}\right] + \frac{mc\left(2v_{II}^2 + v_\perp^2\right)}{2eH^3}\left[\vec{H},\vec{\bigtriangledown}H\right], \\ &\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt} = e\left(\vec{E}\frac{d\vec{R}}{dt}\right) + \mu\frac{\partial H}{\partial t}, rot\vec{H} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

В (1) приняты следующие обозначения: $\vec{U_{\partial p}}$ – дрейфовая скорость ведущего центра, $v_{II}$ и $v_\perp$ – параллельная и перпендикулярная составляющие скорости частицы $v$, $\mu$ – первый адиабатический инвариант, $\tilde{\varepsilon} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(v_{II}^2 + v_\perp^2\right)}{2}$ – энергия частицы. Постоянство $\mu$ в системе (1) выполняется с точностью дрейфового приближения, т.е. с точностью до $\varepsilon \ll 1$ , где $\varepsilon \sim \rho_л/R$ – порядок малости дрейфового приближения, $\rho_л$ – ларморовский радиус, $R$ – характерный размер магнитной системы.

В плоскости экватора постоянного несимметричного поля дрейфовое уравнение системы (1) ($v_{II} = 0$) в криволинейной системе координат $X_1, X_2, X_3$ имеет вид:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{mcv_\perp^2}{2eH^3}\left[\vec{H},\vec{\bigtriangledown}H\right] = -\frac{v_\perp^2}{2\omega_л H}\frac{\partial H}{\partial X_3}\vec{e_2} + \frac{v_\perp^2}{2\omega_л H}\frac{\partial H}{\partial X_2}\vec{e_3}, \tag{2}$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – единичные векторы, направленные вдоль поля $\vec{e}_1 = \vec{H}/H$, главной нормали и бинормали к силовой линии, а $X_1, X_2, X_3$ – соответствующие криволинейные координаты, координата $X_1$ совпадает с силовой линией.

Перед тем как перейти непосредственно к получению и анализу сохранения третьего адиабатического инварианта в формах $I$ и $\Phi$, предварительно рассмотрим возможность его существования в магнитных полях, несимметрия которых ограничена только условием применения дрейфового приближения. Так как каноническая форма $I = \dfrac{1}{2\pi}\oint p_\varphi dq \sim RU_\varphi$ предполагает как минимум квазипериодичность по обобщенной координате $q_\varphi$ (в нашем случае по $X_3$), а приближение не постулирует такой периодичности, то может оказаться, что в несимметричном поле третий инвариант вообще не имеет смысла. Действительно, поскольку уже в стационарном случае несимметричность поля приводит к дрейфу по координате $X_2$ (аналог $R$ в цилиндрической системе координат), т.е. поперек силовых линий, то частица может уйти из ловушки до того, как совершит периодическое движение по обобщенной координате $q_i$ ($X_3$). Например, в области квазизахвата магнитосферы Земли. В этом случае понятие потока $\Phi$ не имеет смысла из-за не замкнутости дрейфовой траектории. Кроме того, несимметрия поля может привести к искажению экваториальной плоскости и, как следствие, к появлению составляющей скорости вдоль силовой линии и к сходу частицы с экваториальной плоскости ($v_{II} \neq 0$). Следовательно, ограничение несимметрии условием применения дрейфового приближения не достаточно не только для анализа точности сохранения адиабатического инварианта, но и его существования вообще.

Согласно уравнению (2) движение ведущего центра для частиц с питч-углом $\alpha = \pi/2$ происходит по линии постоянного $H$ (вектор дрейфовой скорости перпендикулярен как $\vec{H}$, так и $\vec{\nabla} H$).

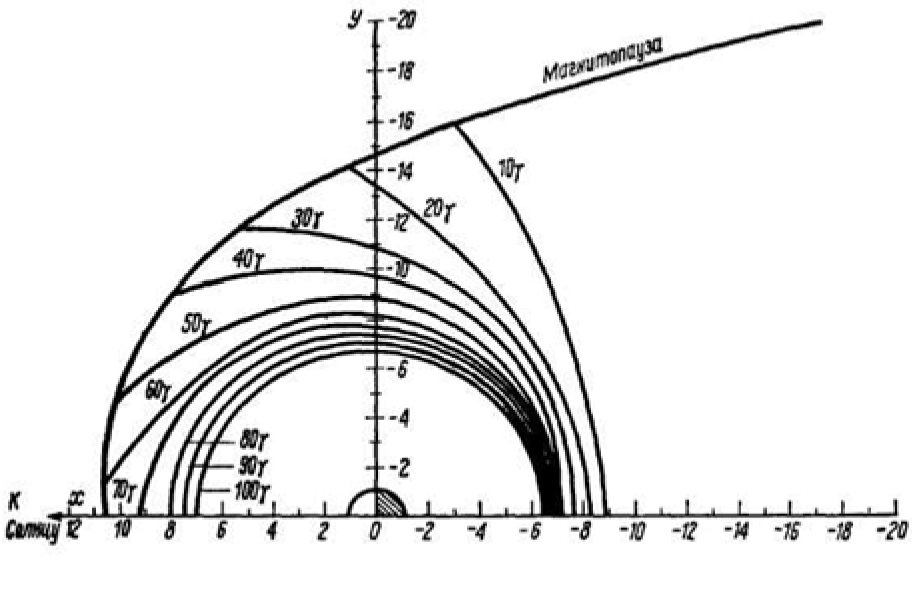


Рисунок. Дрейфовые траектории заряженных частиц (питч-угол $\alpha = \pi/2$ ), рассчитанные по экспериментальным средним изолиниям магнитного поля в экваториальной плоскости магнитосферы Земли [7]. Цифрами при соответствующих изолиниях указаны значения магнитного поля

На рисунке представлены расчетные дрейфовые траектории заряженных частиц, двигающихся в плоскости магнитного экватора [7]. В пределах $\sim 4R_з$ траектории круговые (дипольное приближение магнитного поля). Траектории частиц, по которым они дрейфуют через полуночный меридиан на расстояниях больших $7R_з$, не замыкаются вокруг Земли и достигают боковых границ магнитосферы (магнитопауза). Асимметрия магнитного поля приводит к тому, что дрейфовая траектория по линии $= \mathrm{const}$ проходит ближе всего к Земле в магнитную полночь, пересекая полуденный меридиан на расстояниях $\sim 10R_з$. Следовательно, если в некоторой области экваториальной плоскости стационарного магнитного поля изолинии $H = \mathrm{const}$ замкнуты, то сохранение третьего адиабатического инварианта как в канонической, так и потоковой форме тривиально. Однако имеет смысл рассмотреть движение в плоскости экватора подробнее, чтобы получить некоторые общие положения и в дальнейшем перейти к более сложному случаю движения заряженных частиц с $v_{II} \neq 0$ в отличном от аксиально-симметричного поля $\left(\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} \neq 0\right)$.

Следует отметить, в случае аксиально-симметричного магнитного поля координата, удовлетворяющая периодическому движению заряженной частицы в плоскости экватора, соответствует углу $\Phi$ цилиндрической системы координат $(R, \varphi)$. Для таких полей координатные линии $X_2$ и $X_3$ совпадают соответственно с координатными линиями $R$ и $\varphi$.

## Подвижная система координат $K'$

В цилиндрической системе координат, которую в дальнейшем будем называть системой $K$, дрейфовое уравнение (2) по компонентам распишется следующим образом:

$$U_R = \frac{dR}{dt} = -\frac{v_\perp^2}{2\omega_л H}\frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial \varphi}, U_\varphi = R\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_\perp^2}{2\omega_л H}\frac{\partial H}{\partial R}. \tag{3}$$

Лагранжиан такой частицы будет иметь вид:

$$L = \frac{mU_{\partial p}^2}{2} + \frac{e\left(\vec{U}_{\partial p}\vec{A}\right)}{c} = \frac{m}{2}\left(\vec{R} + \left[\vec{\varphi}, \vec{R}\right]\right)^2 + \frac{e}{c}\left\{\left(\left[\vec{\varphi}, \vec{R}\right]\vec{A}_\varphi\right) + \left(\vec{R}\vec{A}_R\right)\right\}, \tag{4}$$

где $\vec{A} = \vec{A}_R + \vec{A}_\varphi$ – компоненты векторного потенциала, а дрейфовые скорости определяются из (3). Из уравнения Лагранжа для обобщенного импульса $P_\varphi = mR^2\varphi + (e/c)RA_\varphi$ получаем:

$$\frac{dP_\varphi}{dt} = \frac{e}{c}\frac{\partial\left(\vec{U}_{\partial p}\vec{A}\right)}{\partial \varphi} \neq 0.$$

и обобщенный импульс $P_\varphi$ в несимметричном магнитном поле не является константой движения.

Для того чтобы проанализировать величины $R^2\varphi$ и $RA_\varphi$, входящие в обобщенный импульс $P_\varphi$, перейдем к новой системе координат $K'$, которая вращается относительно цилиндрической системы $K$ с угловой скоростью $\varphi$, локально связанной с угловой скоростью ведущего центра [8]. Центр вращения $K'$ совпадает с центром цилиндрической системы координат $K$. Для координат подвижной системы с единичными векторами $\vec{e}'_R$ и $\vec{e}'_\varphi$ можем записать: $R' = R$, $\varphi' = \mathrm{const}$. Так как в системе $K'$

относительная скорость ведущего центра $\vec{V}_{отн}$ равна $\vec{R}$, а переносная $\vec{V}_{пер} = \left[\vec{\varphi}, \vec{R}\right]$, то

$$\vec{U}_{др} = \vec{U}_{abc} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер} = \vec{R} + \left[\vec{\varphi}, \vec{R}\right].$$

С физической точки зрения переход к вращающейся системе координат означает следующее. Во-первых, за счет $\vec{V}_{пер}$ в системе $K'$ наводится электрическое поле $\vec{E}_1$ , которое определяется как

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{c}\left[\left[\vec{\varphi}, \vec{R}\right], \vec{H}\right] = \frac{1}{c}\left[\vec{U}_{\varphi}, \vec{H}\right]. \tag{5}$$

Это поле «компенсирует» скорость градиентного дрейфа, появляющегося за счет $(\partial H/\partial R)$ . Действительно, умножив векторно (5) на $\vec{H}$, получим скорость в подвижной системе:

$$\vec{V}_{E_1} = c\frac{\left[\vec{E}_1, \vec{H}\right]}{H^2} = \frac{\left[\left[\vec{U}_{\varphi}, \vec{H}\right], \vec{H}\right]}{H^2} = -\vec{U}_{\varphi}.$$

Во-вторых, поскольку в такой системе координат отсутствует зависимость поля от $\varphi'$, т.е. $(\partial H/\partial \varphi') = 0$ , а поле магнитное $H$ обладает несимметрией, то появляется частная производная $\partial H'/\partial t$ , не равная нулю $(H' = H)$. Это приводит к возникновению еще одного электрического поля $\vec{E}_2$ ортогонального $\vec{E}_1$. Действительно, поскольку для данного $\vec{R}'$ поле в точке меняется за счет поворота системы координат $K'$ в несимметричном поле $H$, то в данной точке подвижной системы координат $\partial H'/\partial t \sim rot\vec{E}_2 \neq 0$. Следовательно, движение ведущего центра в системе $K'$ соответствует движению в скрещенных электрических и магнитных полях и задается уравнением:

$$\frac{d\vec{R}'}{dt} = \frac{c}{H^2}\left[\vec{E}_1, \vec{H}\right] + \frac{c\mu}{eH'}\frac{\partial H'}{\partial R'}\vec{e}_{\varphi'}. \tag{6}$$

Уравнение (6) соответствует уравнению, описывающему движение ведущего центра в переменном аксиально-симметричном поле (отсутствует зависимость от $\varphi'$ ), плюс электрическое поле, наведенное за счет переносной скорости. Следовательно, относительно кинематических соотношений переход к описанию движения заряженной частицы в подвижной системе координат эквивалентен переходу к аксиальному переменному полю. Если учесть значения скоростей дрейфа (3), электрического поля $\vec{E}_1$ (5) и равенство $H' = H$ , то для изменения радиус-вектора $R'$ в системе $K'$ можем записать:

$$\frac{d\vec{R}'}{dt} = \frac{c}{H^2}\left[\vec{E}_2, \vec{H}\right]. \tag{7}$$

Умножив (7) на $\vec{H}$, получим значение электрического поля $\vec{E}_2$:

$$\vec{E}_2 = -\frac{1}{c}\left[\vec{R}, \vec{H}\right] = -\frac{v_{\perp}^2}{2\omega_л HR}\frac{\partial H}{\partial \varphi}\vec{e}_{\varphi'} \tag{8}$$

В последнее выражение подставлялось значение $R$ из (2). Следовательно, выражение (8) как раз и показывает, что возникновение электрического поля в системе $K'$ обусловлено наличием аксиальной несимметрии.

## Третий адиабатический инвариант в канонической форме

Рассмотрим теперь лагранжиан $L'$ в подвижной системе координат [9]. Согласно преобразованиям Лоренца для 4-вектора потенциала поля $\vec{A}^i = \left(\psi, \vec{A}\right)$ , где $\psi$ – скалярный потенциал и $i = (0, 1, 2, 3)$, получаем в системе $K'$ для нерелятивистского случая

$$\psi' = -\frac{U_\varphi A'_\varphi}{c}, A'_\varphi = A_\varphi, A'_R = A_R.$$

Здесь штрих при компонентах 4-вектора относится к системе $K'$, скорость $U_\varphi$ направлена по $A_\varphi$. Из преобразований 4-вектора видно, что компоненты векторного потенциала $\vec{A}$ в подвижной системе координат сохраняются, но наводится потенциал электрического поля $\psi$, появление которого связано с $\vec{E}_1$ . Вихревое электрическое поле $\vec{E}_2$ не имеет потенциала и определяется через частную производную по времени от магнитного поля. С учетом этого лагранжиан (4) в системе $K'$ будет иметь вид:

$$L' = \frac{m\vec{V}^2_{отн}}{2} + m\left(\vec{V}_{отн}\left[\dot{\vec{\varphi}}, \vec{R}\right]\right) + \frac{m\left[\dot{\vec{\varphi}}, \vec{R}\right]^2}{2} + \frac{e\left(\vec{V}_{отн}\vec{A}\right)}{c} - e\psi. \tag{9}$$

Получим уравнения движения ведущего центра в системе $K'$ . Для этого представим полный дифференциал лагранжиана (9) в следующем виде, введя обозначение для потенциальной энергии – $W_n = W_n\left(\vec{R}, \vec{V}_{отн}\right)$,

$$dL' = m\left(\vec{V}_{отн} \cdot d\vec{V}_{отн}\right) + m\left(d\vec{V}_{отн}\left[\dot{\vec{\varphi}}, \vec{R}\right]\right) + m\left(dR\left[\vec{V}_{отн}\dot{\vec{\varphi}}\right]\right) +$$

$$+m\left[\left[\dot{\vec{\varphi}}, \vec{R}\right]\dot{\vec{\varphi}}\right]d\vec{R} - \frac{\partial W_n}{\partial \vec{R}}d\vec{R} - \frac{\partial W_n}{\partial \vec{V}_{отн}}d\vec{V}_{отн}.$$

Дифференцируя отдельно последнее выражение сначала по $\vec{V}_{отн}$, а затем по $\vec{R}$, из уравнения Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial V_{отн}} = \frac{\partial L'}{\partial R}$ получим искомое уравнение относительно скорости заряженной частицы во вращающейся системе координат

$$m\frac{d\vec{V}_{отн}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial W_n}{\partial \vec{V}_{отн}} - \frac{\partial W_n}{\partial \vec{R}} + m\left[\vec{R}, \ddot{\vec{\varphi}}\right] + 2m\left[\vec{V}_{отн}, \dot{\vec{\varphi}}\right] + m\left[\left[\dot{\vec{\varphi}}, \vec{R}\right], \dot{\vec{\varphi}}\right]. \tag{10}$$

В (10) последние три члена появились за счет перехода к неинерциальной системе координат $K'$ и соответственно равны: силе, появляющейся за счет неравномерности вращения ($\ddot{\varphi} \neq 0$), силе Кориолиса и центробежной силе. Раскрыв векторные произведения и умножив (10) скалярно на единичные вектора $\vec{e}_{R'}$ и $\vec{e}_{\varphi'}$ системы $K'$, получим:

$$m\dot{\vec{V}}_{отн} = -\frac{\partial W_n}{\partial R} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W_n}{\partial V_{отн}} + mR\dot{\varphi}^2, 2m\dot{R}\dot{\varphi} + mR\ddot{\varphi} = 0. \tag{11}$$

Из второго уравнения (11) путем интегрирования следует

$$R^2\dot{\varphi} = const. \tag{12}$$

Следовательно, система координат $K'$ вращается так, что квадрат радиус-вектора частицы в этой системе ($R' = R$), умноженный на ее угловую скорость вращения, есть величина постоянная. Однако угловая скорость $K'$ локально связана с угловой скоростью вращения частицы в системе $K$, поэтому для частицы в цилиндрических координатах, с учетом равенства $U_\varphi = R\dot{\varphi}$ , можем записать:

$$RU_\varphi = const. \tag{13}$$

Учитывая, что значение скорости $U_\varphi$ с точностью дрейфового приближения задается соотношением (3), то постоянство (13) выполняется с этой же степенью точности.

В работах [1],[2] было показано, что в аксиально-симметричном переменном магнитном поле кумулятивными эффектами, связанными с радиальным ускорением, приводящими к нарушению третьего адиабатического инварианта, можно пренебречь при выполнении условия $U_R/U_\varphi \ll 1$, что соответствует требованию малости скорости радиального дрейфа по сравнению с азимутальной скоростью. Поскольку в подвижной системе координат $K'$ радиальная скорость $U_R$ определяется соотношением (7), то в этой системе условие ее малости по отношению к переносной скорости $V_{пер} = U_\varphi$ может быть представлено:

$$6\pi\frac{U_R}{U_\varphi} = 6\pi c\frac{E_2}{HU_\varphi} \ll 1$$

Подставив в последнее выражение значение $E_2$ из (8) и из второго уравнения (3), получим, опустив знак минус,

$$\frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial \varphi}\Big/\frac{\partial H}{\partial R} \ll 1$$

или

$$\frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial \varphi} \ll \frac{1}{6\pi}\frac{\partial H}{\partial R}, \tag{14}$$

что соответствует требованию наличия слабой неаксиальности магнитного поля: радиальный градиент много больше азимутального. Определим вид константы в выражения (12), (13). Для несимметричных магнитных полей, которые удовлетворяют дрейфовому приближению, справедливо

$$\frac{\partial H}{\partial X_2} \cong \frac{\partial H}{\partial R} = \frac{H}{R_{кр}},$$

где $R_{кр}$ – радиус кривизны силовой линии [1],[2],[10]. Введем обозначение $k = R/R_{кр}$. Однако в противоположность симметричному полю в нашем случае $k$ является слабой функцией угла $\varphi$. С учетом сказанного, перепишем последнее выражение:

$$\frac{\partial H}{\partial R} = \frac{H}{R}k(\varphi). \tag{15}$$

Подставив (15) во второе уравнение (3), выразим $RU_\varphi$

$$RU_\varphi = \frac{v_\perp^2}{2\omega_л}k(\varphi) = \frac{c}{e}\mu k(\varphi), \tag{16}$$

где $\mu = mv_\perp^2/2H$ — первый адиабатический инвариант. Из сравнения (12) с (16) получаем, что $k(\varphi) = k \cong const$ с точностью $\mu \cong const$ . Поэтому, зная явный вид const в (12) и (16), окончательно можем записать:

$$RU_\varphi = \frac{c}{e}\mu k = const. \tag{17}$$

Следовательно, третий адиабатический инвариант в канонической форме согласно (17 ) в полях со слабой несимметрией сохраняется. Действительно,

$$I = \frac{m}{2\pi}\oint RU_\varphi d\varphi = mRU_\varphi = \frac{c}{e}\mu k = const. \tag{18}$$

## Третий адиабатический инвариант в потоковой форме

Рассмотрим сохранение третьего инварианта в потоковой форме и эквивалентность замены $I$ на $\Phi$. В случае симметричного поля эта замена обеспечивалась постоянством обобщенного импульса $P_\varphi$ по циклической переменной $\varphi$. Однако, если цикличность $\varphi$ для аксиального поля является основой симметрии, то для дрейфовых уравнений независимость от $\varphi$ является приближенной, причем с той степенью точности, с которой дрейф отделен от ларморовского вращения. Именно поэтому в цилиндрической системе координат лагранжиан не зависел от $\phi$ и обобщенный импульс $P_\varphi$ являлся константой с той же самой точностью. В случае несимметричного поля $P_\varphi = mRU_\varphi + (e/c)RA_\varphi$ не является константой движения и $\dot{P_\varphi} \neq 0$ . С учетом постоянства $RU_\varphi$ представим уравнение Лагранжа $P_\varphi$ в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}P_\varphi = \frac{e}{c}\frac{d}{dt}RA_\varphi = \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(U_R A_R + U_\varphi A_\varphi\right) = \frac{e}{c}\left(U_R\frac{\partial A_R}{\partial\varphi} + U_\varphi\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right) \neq 0. \tag{19}$$

В (19) учтено, что скорости дрейфа не зависят от $\varphi$ с точностью $\mu = const$ . Следовательно, $RA_\varphi$ при дрейфе в несимметричном поле не сохраняется. Согласно определению магнитного потока имеем:

$$\Phi = \iint\limits_{s} \vec{H}d\vec{S} = \oint \vec{A}d\vec{l} = \oint RA_\varphi d\varphi + \oint A_R dR.$$

По теореме о среднем преобразуем последнее выражение:

$$\Phi = 2\pi\langle RA_\varphi\rangle + \langle A_R\rangle \triangle R, \tag{20}$$

где $\triangle R = R_\kappa - R_H$, $R_H$ – начальное значение радиуса $R$ ($\varphi_н = 0$), $R_\kappa$ — конечное значение $R$ ($\varphi_\kappa = 2\pi$). Поэтому для того, чтобы поток в (20) был усредняемой величиной, необходима, как минимум, квазипериодичность движения ведущего центра по траектории ведущего центра. В то же время дрейфовое движение наличие такого движения не постулирует. Определим $\triangle R$ в (20), разделив в (3) первое уравнение на второе и воспользовавшись соотношением (16) ($k = const$)

$$\frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial\varphi} = -\frac{1}{kH}\frac{\partial H}{\partial\varphi}.$$

Откуда, путем интегрирования, получим:

$$\triangle R = R_н - R_\kappa = R_н\left[\exp\left(-\frac{1}{k}\oint\frac{\partial H}{H\partial\varphi}d\varphi\right) - 1\right] \tag{21}$$

Интегрирование в степени экспоненты производится от $\varphi = 0 (R = R_н)$ до $\varphi = 2\pi$ ($R = R_\kappa$). Однако согласно (17) ведущий центр с точностью дрейфового приближения совершает периодическое движение и возвращается в исходную точку. Поэтому $R_н =$

$R_\kappa$ и $\langle \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial \varphi}\rangle = 0$ траектория замкнута и движение вырожденное (символ $\langle\rangle$ означает усреднение по циклическому углу $\varphi$). Отсюда $\triangle R = 0$ и $\langle A_R\rangle = 0$. Поэтому инвариант в потоковой форме $\Phi$ постоянен с той же степенью точности, что и канонической $I$ в (18):

$$\Phi = 2\pi\langle RA_\varphi\rangle = const. \tag{22}$$

Поэтому, как следует из (22), среднее по периоду дрейфа значение обобщенного импульса $P_\varphi$ есть величина усредняемая $P_\varphi = m\langle RU_\varphi\rangle + (e/c)\langle RA_\varphi\rangle = const$, где согласно (16) $\langle RU_\varphi\rangle = RU_\varphi$.

Из сказанного следует, что сохранение $R^2\dot{\varphi} = RU_\varphi$ в магнитном поле со слабой несимметрией следует из рассмотрения подвижной системы координат $K'$, движение в которой (с точки зрения кинематических соотношений), соответствовало аксиально-симметричному переменному во времени полю. Однако в этих полях сохранение адиабатического инварианта в форме $RU_\varphi$ соответствовало точности дрейфового приближения для небольших интервалов времени, так как кумулятивные эффекты, связанные с неусредняемым ускорением по $R$, приводили к нарушению инвариантов. Действительно, продифференцировав первое уравнение (3) по времени для случая постоянного поля в пренебрежении вторыми производными по координатам, получим

$$\ddot{R} \approx \frac{v_\perp^2}{2\omega_л H}\frac{\dot{R}}{R}\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\dot{R}^2}{R} = -\frac{1}{R}\left(\frac{v_\perp^2}{2\omega_л HR}\right)^2\left(\frac{\partial H}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Следовательно, в общем случае $\langle R\rangle \sim (\partial H/\partial\varphi)^2$, и кумулятивные эффекты, связанные с неусредняемостью радиального ускорения, должны приводить к нарушению сохранения $RU_\varphi$. Однако выполнение условия (14) позволяет пренебречь ускорением инвариантной оболочки.

## Переменное во времени исходное поле

Если теперь рассмотреть переменное во времени исходное магнитное поле, то ни к чему принципиально новому это не приведет. Действительно, согласно уравнению Максвелла $rot\vec{E} \sim -\partial\vec{H}/\partial t$ в переменном поле неподвижной системы координат наводится вихревое электрическое поле $\vec{E}_3$, которое суммируется с электрическими полями, наведенными во вращающейся системе координат за счет переносной скорости $\vec{E}_1$ (5) и неаксиальности $\vec{E}_2$ (6). В этом случае для сохранения третьего адиабатического инварианта в канонической и потоковой формах достаточно выполнения стандартного условия адиабатичности

$$\left|\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right| \ll \frac{H}{T_{\partial p}}, \tag{23}$$

где $T_{\partial p}$ – период дрейфа по координате $\varphi$.

## Выводы

На примере движения заряженных частиц в плоскости экватора ($v_{II} = 0$) рассмотрен вопрос сохранения третьего адиабатического инварианта движения в потоковой и канонической форме в магнитных полях, обладающих несимметрией. Показано, что: - в случае $\rho_л \ll R$ (дрейфовое приближение) в несимметричных полях переход к вращающейся, с угловой скоростью дрейфа частицы $\dot{\varphi}_{\partial p}$ , системе координат позволяет свести задачу к рассмотренному случаю аксиально-симметричного, но переменного магнитного поля. При этом кумулятивными эффектами радиального ускорения можно пренебречь при выполнении условия $U_R/U_\varphi \ll 1$, что автоматически приводит к требованию наличия слабой аксиальной несимметрии поля (5) и, как следствие, к эквивалентности адиабатических инвариантов в формах $J$ и $\Phi$ и к возможности считать их постоянными величинами; - в случае переменного исходного магнитного поля условием сохранения инвариантов в формах $J$ и $\Phi$ и их постоянства в поля со слабой несимметрией является выполнение обычного условия адиабатичности (23) совместно с (14).

## Библиографический список


1. Богданов В.В., Плетнев В.Д. К вопросу о точности сохранения третьего адиабатического инварианта движения заряженной частицы в аксиально-симметричных полях // Космические исследования. 1972. Т.10. Вып. 3. С. 358-367.

2. Богданов В.В., Плетнев В.Д. К вопросу о точности сохранения третьего адиабатического инварианта движения заряженной частицы в аксиально-симметричных полях // Космические исследования. 1972. Т.10. Вып. 4. С. 528-531.

3. Богданов В.В. Динамика магнитосферной плазмы в дрейфовом приближении. Владивосток: Дальнаука, 2006. 140 с.

4. Боголюбов Н.Н., Зубарев Д.Н. Метод асимптотического приближения для систем с вращающейся фазой и его применение к движению заряженных частиц в магнитном поле // Укр. мат. журн. 1955. Вып. 1. С. 5-17.

5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.

6. Berkowitz, Gardner C. Communz, Pure and Appl. Math., 1959, Vol. 12. P. 501.

7. Fairfield D.H. The average magnetic field configuration of outer magnetosphere // J. Geophys. Res. 1968. Vol.73. P. 7329-7338.

8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.

10. Редерер Х. Динамика радиации, захваченной геомагнитным полем. М.: Мир, 1972. 192 с.


Поступила в редакцию / Original article submitted: 09.11.2015