Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). С. 55-60. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-55-60

УДК 517.958:537.84

ИНВЕРСИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В МОДЕЛИ КРУПНОМАСШТАБНОГО $\alpha\Omega$ -ДИНАМО

Г.М. Водинчар[1, 2], А.Н. Годомская[1], О.В. Шереметьева[1, 2]

[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

[2] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский край, ул.Пограничная, 4

E-mail: gvodinchar@ikir.ru, anna_ antonenko@mail.ru, olga.v.sheremetyeva@gmail.com

В работе исследуется вопрос о возможности возникновения инверсий в рамках маломодовой модели $\alpha\Omega$ -динамо. Определены параметры МГД-системы, при которых возможны инверсии магнитного поля при относительном постоянстве поля скоростей вязкой проводящей замагниченной жидкости. Обсуждаются результаты численного решения системы в предположении различного вида зависимостей амплитуды α-эффекта от радиуса.

Ключевые слова: крупномасштабная модель динамо, альфа-омега динамо, магнитное поле, инверсии.

MSC 65N80

REVERSAL OF MAGNETIC FIELD IN THE LARGE-SCALE $\alpha\Omega$ -DINAMO

G.M. Vodinchar[1, 2], A.N. Godomskaya[1], O.V. Sheremetyeva[1, 2]

[1] Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

[2] Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: gvodinchar@ikir.ru, anna_ antonenko@mail.ru, olga.v.sheremetyeva@gmail.com

In the paper investigates the question of the possibility of a reversal in the framework of low-mode model, $\alpha\Omega$ -dinamo. The parameters of the MHD system in which the possible reversal of the magnetic field in the relative constancy of the velocity field are defined. There are results of numerical solution of the assumption of various type of α -effect amplitude dependence from the radius.

Key words: $\alpha\Omega$-dynamo, magnetic field, reversal, large-scale dynamo.

Введение

Для астрофизических объектов (планет, звезд, галактических дисков) типичен механизм $\alpha\Omega$-динамо [1]. Данный вид динамо предполагает дифференциальное вращение объекта и турбулентный характер движения проводящей среды в этом объекте [2, 3, 4, 5]. В реальных космических динамо-системах наблюдаются инверсии, в том числе и на Земле. Информацию об инверсиях геомагнитного поля получают из палеомагнитных записей, на основе которых строится шкала геомагнитной полярности. Интервалы времени между инверсиями (интервалы полярности) отличаются на несколько порядков, существуют длительные интервалы без инверсий [6]. Кроме того, следует отметить, что периоды инверсий в магнитном поле значительно меньше нежели в поле скорости хорошо проводящей вязкой жидкости. Построение модели динамо, полностью воспроизводящей реальную палеомагнитную шкалу, является трудновыполнимой задачей. Различные модели динамо позволяют получить случайные последовательности инверсий, свойства которых сильно отличаются в зависимости от выбора параметров.

Основной целью работы в рамках принятой модели динамо является получение решений системы магнитогидродинамического типа, при которых могут возникать инверсии в магнитном поле при относительном постоянстве поля скорости.

Постановка задачи

Будем рассматривать модель $\alpha\Omega$-динамо в предположении аксиальной симметричности поля скорости вязкой жидкости $\mathbf{u}$ и магнитного поля $\mathbf{B}$. Тогда пространственная структура среднего поля $\overline{\mathbf{u}}$ простая и можно ограничиться одномодовыми приближениями для тороидальной и полоидальной компонент этих полей, которые можно описать скалярными функциями:

$$\begin{array}{l}\mathbf{v} = u^T\mathbf{v}_1(\mathbf{r}) + u^P\mathbf{v}_2(\mathbf{r}),\\ \mathbf{B} = B^T\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) + B^P\mathbf{B}_2(\mathbf{r}),\end{array} \tag{1}$$

где компоненты поля скорости и магнитного поля считаются независимыми от времени и составляющая $\mathbf{B}_1^P(\mathbf{r})$ является дипольной

$$\begin{array}{rcl}\mathbf{v}_1(\mathbf{r}) &=& \mathbf{v}_1^T(\mathbf{r}),\\ \mathbf{v}_2(\mathbf{r}) &=& \mathbf{v}_2^P(\mathbf{r}),\\ \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) &=& \mathbf{B}_2^T(\mathbf{r}),\\ \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) &=& \mathbf{B}_1^P(\mathbf{r}).\end{array} \tag{2}$$

Полагаем, что среднее течение $\overline{\mathbf{u}}$ носит характер дифференциального вращения [2, 3, 4, 5]. С учетом сделанных предположений нижеприведенную систему МГД-уравнений крупномасштабного динамо

$$\begin{cases}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + 2\Omega\times\mathbf{v} + \Omega\times(\Omega\times\mathbf{r}) = \nu\Delta\mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla P + \dfrac{1}{\rho\mu}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \mathbf{f},\\ \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) + \nu_m\Delta\mathbf{B},\\ \nabla\mathbf{v} = \nabla\mathbf{B} = 0,\end{cases} \tag{3}$$

где $\mathbf{v}$ – поле скорости вязкой жидкости, $\mathbf{B}$ – магнитное поле, $\mathbf{f}$ – внешняя сила (источник полоидальной скорости), P – давление, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, ρ – плотность, ν

– кинематическая вязкость, ν_m – магнитная вязкость, μ – магнитная проницаемость, можно записать в маломодовом приближении, используя метод Галёркина [3], в следующем виде

$$\begin{cases} \dfrac{du^T}{dt} = Re_m B_{112} u^T u^P - \dfrac{Re_m}{Re}\mu_1 u^T + \dfrac{Re_m}{E\cdot Re} P_{12} u^P + L_{112} B^T B^P, \\ \dfrac{du^P}{dt} = Re_m B_{211} (u^T)^2 - \dfrac{Re_m}{Re}\mu_2 u^P + \dfrac{Re_m}{E\cdot Re} P_{21} u^T + L_{211}(B^T)^2 + L_{222}(B^P)^2 + f, \\ \dfrac{dB^T}{dt} = Re_m (W_{112} u^T B^P + W_{121} u^P B^T) + R_\alpha W_{12}^\alpha B^P - \nu_1 B^T, \\ \dfrac{dB^P}{dt} = Re_m W_{222} u^P B^P + R_\alpha W_{21}^\alpha B^T - \nu_2 B^P, \end{cases} \tag{4}$$

где u^T – тороидальная мода скорости, u^P – полоидальная мода скорости, B^T – тороидальная мода магнитного поля, B^P – полоидальная мода магнитного поля, Re – число Рейнольдса, Re_m – магнитное число Рейнольдса, R_α – амплитуда α-эффекта, E – число Экмана, f – внешняя сила, μ_i – коэффициент вязкой диссипации, ν_i – коэффициент магнитной диссипации. Случайным образом задаются значения $Re = 10 \div 10^4$, $Re_m = 10^4 \div 10^{10}$, $E = 10^{-10} \div 10^{-5}$ в границах изменения их возможных значений. Коэффициенты $B_{ijk}, W_{ijk}, W_{ij}, P_{12}$ - это объемные интегралы от рассматриваемых полей, значения которых для принятой модели принимаются равными:
$B_{112} = 0.365$, $B_{211} = -0.365$, $B_{222} = -0.170$, $P_{12} = 0.193$, $L_{112} = 0.487$, $L_{211} = 0.211$, $W_{112} = -0.487$, $W_{121} = -0.211$, $W_{222} = 0.170$, $\nu_1 = 33.218$, $\nu_2 = 9.870$, $\mu_1 = 28.159$, $\mu_2 = 86.573$.
В зависимости от определения алгебраической функции для задания амплитуды α-эффекта коэффициенты W_{ij}^α принимают следующие значения:

1) если зависимость постоянная $\alpha(r) = 1:$ $W_{12}^\alpha = 1.874, W_{21}^\alpha = 1.037$,

2) если зависимость линейная $\alpha(r) = r:$ $W_{12}^\alpha = 1.073, W_{21}^\alpha = 0.788$,

3) если зависимость от радиуса синусоидальная $\alpha(r) = \sin r$: $W_{12}^\alpha = -0.506$, $W_{21}^\alpha = 0.117$.

Результаты моделирования

В предположении относительного постоянства поля скорости примем значения мод скорости постоянными. Тогда наличие инверсий в магнитном поле будет возможным лишь при условии наличия осциллирующего решения для двух последних дифференциальных уравнений системы (4):

$$\begin{cases} \dfrac{dB^T}{dt} = Re_m (W_{112} u^T B^P + W_{121} u^P B^T) + R_\alpha W_{12}^\alpha B^P - \nu_1 B^T, \\ \dfrac{dB^P}{dt} = Re_m W_{222} u^P B^P + R_\alpha W_{21}^\alpha B^T - \nu_2 B^P, \end{cases} \tag{5}$$

с неизвестными параметрами R_α, $Re_m u^P$, $Re_m u^T$, области возможного изменения которых в логарифмическом масштабе приняты следующими

$$\lg R_\alpha \in [-1, 3],\ \lg(Re_m u^P) \in [3, 7],\ \lg(Re_m u^T) \in [2, 8].$$

Осциллирующее решение системы (5) может быть получено лишь при условии отрицательности дискриминанта ее характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} Re_m W_{121} u^P - \nu_1 & Re_m W_{112} u^T + R_\alpha W_{12}^\alpha \\ R_\alpha W_{21}^\alpha & Re_m W_{222} u^P - \nu_2 \end{vmatrix} = 0$$

и получаемое решение будет устойчивым по Ляпунову [8], если положительны коэффициенты характеристического уравнения, записанного в общем виде $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$:

$$p = 43.088 + 0.041 Re_m u^P,$$
$$q = -0.035870 Re_m (u^P)^2 - 3.564490 Re_m u^P + 0.487 W_{21} R_\alpha Re_m u^T + 327.861660 - W_{21} R_\alpha^2 W_{12},$$

Исходя из принятых ограничений получена область в пространстве рассматриваемых параметров R_α, $Re_m u^P$, $Re_m u^T$, в которой магнитное поле имеет колебательный характер (рис. 1).

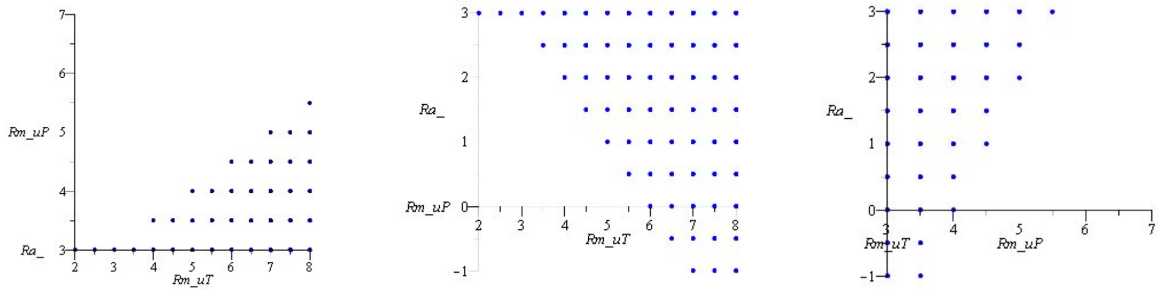
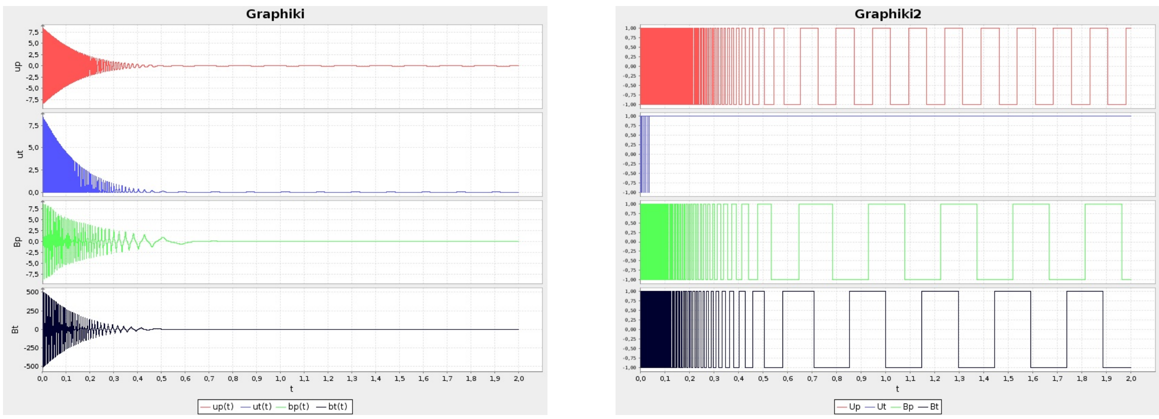


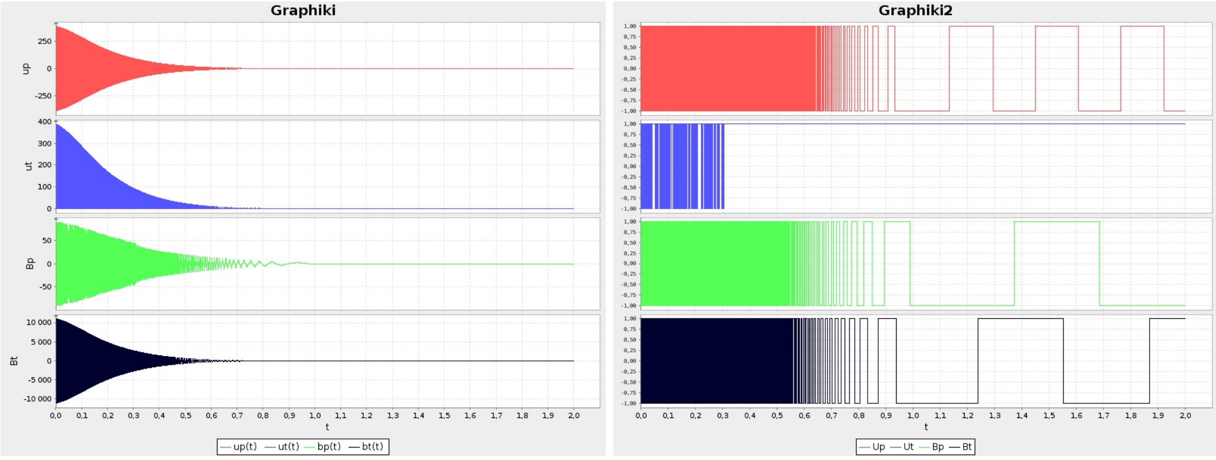
Рис. 1. Проекции области осциллирующего решения системы (5) в пространстве параметров R_α, $Re_m u^P$, $Re_m u^T$

Численные расчеты показали, что инверсии в магнитном поле возникают в большинстве точек полученной области. Однако, как правило, и поле скорости, и магнитное поле быстро затухают, причем периоды осцилляций в рассматриваемых полях практически одинаковы (рис. 2 – 3).



а) б)

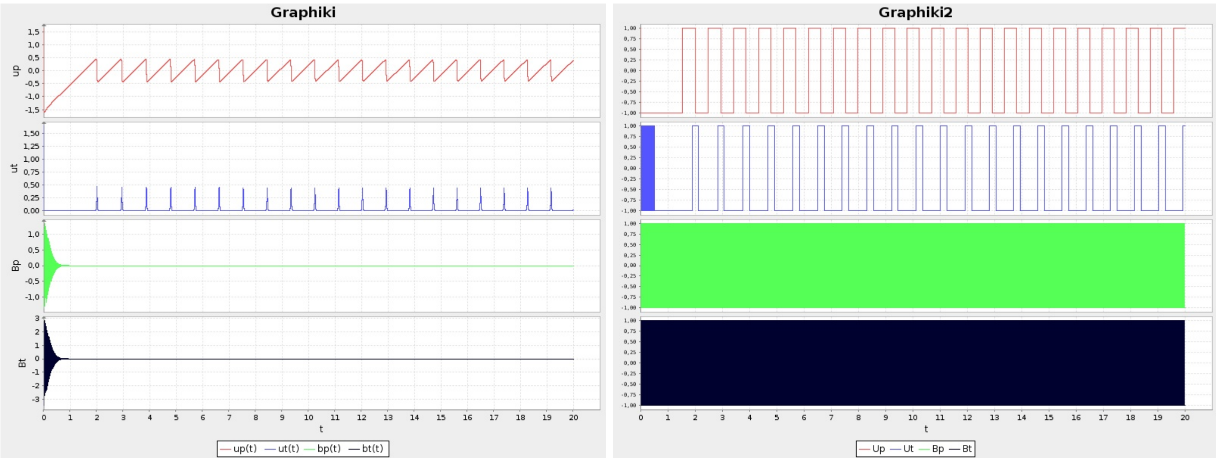
Рис. 2. Изменения тороидальной и полоидальной мод поля скорости и магнитного поля при задании амплитуды α-эффекта линейной зависимостью $\alpha(r) = 1$



а) б)

Рис. 3. Изменения тороидальной и полоидальной мод поля скорости и магнитного поля при задании амплитуды α-эффекта линейной зависимостью $\alpha(r) = r$: а) зависимость компонент рассматриваемых полей от времени; б) инверсии компонент рассматриваемых полей

Инверсии в магнитном поле, возникающие на фоне более медленных изменений в поле скорости, характерны для случая синусоидальной зависимости амплитуды α-эффекта от радиуса (рис. 4). Но и в этом случае магнитное поле быстро затухает и его колебания происходят вблизи нулевого значения.



а) б)

Рис. 4. Изменения тороидальной и полоидальной мод поля скорости и магнитного поля при задании амплитуды α-эффекта нелинейной зависимостью $\alpha(r) = \sin r$

Заключение

Исходя из принятой маломодовой модели $\alpha\Omega$-динамо в предположении аксиальной симметрии полей были получены инверсии в магнитном поле при реалистичных областях изменения параметров МГД-системы (4). Однако данная модель не позволила в пределах принятых ограничений параметров получить инверсии на фоне практически постоянного поля скорости. Во всех случаях, за исключением нелинейной зависимости амплитуды α-эффекта от радиуса, периоды инверсии поля скоростей сравнимы с периодами инверсий магнитного поля.

Модели данного класса предполагают значительные упрощения и отражают наиболее общие свойства, поэтому для описания механизма инверсий необходим корректный выбор мод рассматриваемых полей. Полученные результаты позволяют определить направление уточнения выбранной маломодовой модели $\alpha\Omega$-динамо для описания рассматриваемого механизма инверсий.

Библиографический список

1. Parker E.N. Hydromagnetic dynamo models // Astrophys. J. 1955. № 122. p. 293–314.
2. Krause, F. and Rädler, K.-H. Mean-filed magnetohydrodynamics and dynamo theory. Pergamon Press. 1980.
3. Steenbek M., Krause F. and Radler K.-H. Berechnung der mittlerer Lorentz–Field Starke $\mathfrak{v} \times \mathfrak{B}$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis–Kräfte beenflusster Bewegung // Z. Naturforsch. 1996. № 21. p. 369-376.
4. Steenbek M. and Krause F. Zur Dynamotheorie stellarer and planetarer Magnetfelder. I. Berechnunug sonnenahnlicher Wechselfeldgeneratoren // Astron. Nachr. 1969. № 291. p. 49-84.
5. Zeldovich, Ya.B., Rusmaikin, A.A., and Sokoloff, D.D.: Magnetic fields in astrophysics. The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics, Gordon and Breach, New York, 1983.
6. Merril R.T., McElhinny M.W. and McFadden P.L. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle. Academic Press. London. 1996.
7. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 368 с.
8. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М: Наука, 1969. 424 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 16.11.2015