Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). C. 39-44. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-39-44

УДК 517.927

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С РАЗЛИЧНЫМИ НАЧАЛАМИ

Л.М. Энеева

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Республика Кабардино-Балкария, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: aneeva@pochta.ru

Исследуется спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения с композицией операторов дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля и Капуто с различными началами. Доказано, что исследуемая задача имеет бесконечное число собственных значений и собственных функций. Все собственные значения являются вещественными и положительными, а собственные функции образуют полную ортогональную систему в $L_2(0,1)$.

Ключевые слова: дробная производная; краевая задача; собственное значение; собственная функция

MSC 34L05

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION WITH FRACTIONAL ORDER DERIVATIVES WITH DIFFERENT ORIGINS

L.M. Eneeva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Republic of Kabardino-Balkariya, Nalchik, st. Shortanova, 89a

E-mail: aneeva@pochta.ru

We study a spectral problem for an ordinary differential equation with composition of fractional order differentiation operators in Riemann-Liouville and Caputo senses with different origins. We prove that for the problem under study there exist infinite sequences of eigenvalues and eigenfunctions. All of the eigenvalues are real and positive, and the eigenfunctions form an orthogonal basis in $L_2(0,1)$.

Key words: fractional derivative, boundary value problem, eigenvalue, eigenfunction

Введение

Известно, что уравнения дробного порядка выступают основой математического моделирования процессов, протекающих во фрактальных средах [1, гл. 5]. При построении математических моделей геофизических процессов, введение понятия эффективной скорости изменения тех или иных физических величин [2], характеризующих моделируемые процессы, приводит к дифференциальным уравнениям, содержащим композицию операторов дробного дифференцирования с различными началами [3], [4], [5]. В данной работе исследуются спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения с композицией операторов дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля и Капуто с различными началами.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)-\lambda u(x)=0, \tag{1}$$

$$u(0)=0,\quad u(1)=0, \tag{2}$$

где

$$D_{0x}^{\alpha}h(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{h(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}},\qquad \partial_{1x}^{\alpha}h(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^1\frac{h'(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}},$$

— операторы дифференцирования дробного порядка α, $0<\alpha<1$, в смысле Римана-Лиувилля и Капуто с началом в точке $x=0$ и $x=1$, соответственно; λ — спектральный параметр; $x\in]0,1[$.

В данной работе доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\alpha\in]1/2,1[$. Задача (1), (2) имеет бесконечное число собственных значений λ_k и собственных функций $u_k(x)$, $k=1,2,...$. Все собственные значения λ_k являются вещественными и положительными. Собственные функции $u_k(x)$ задачи (1), (2) образуют полную ортогональную систему в $L_2(0,1)$.*

Доказательство. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1). Применяя последовательно к обеим частям уравнения (1) операторы $D_{0x}^{-\alpha}$ и $D_{1x}^{-\alpha}$, принимая во внимание соотношения

$$D_{0x}^{-\alpha}D_{0x}^{\alpha}h(x)=h(x)-\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[D_{0x}^{\alpha-1}h(x)\right]_{x=0},$$

$$D_{1x}^{-\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}h(x)=-D_{1x}^{-\alpha}D_{1x}^{\alpha-1}h'(x)=-D_{1x}^{-1}h'(x)=-\int_x^1h'(t)dt=h(x)-h(1),$$

получаем, что $u(x)$ — решение уравнения

$$u(x)-\lambda D_{1x}^{-\alpha}D_{0x}^{-\alpha}u(x)=C_1D_{1x}^{-\alpha}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+C_2, \tag{3}$$

где

$$C_1=\left[D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)\right]_{x=0},\qquad C_2=u(1)=0.$$

Обозначив через

$$(z)_+^{\mu}=\begin{cases} z^{\mu}, & \text{если}\quad z>0,\\ 0, & \text{если}\quad z\le 0,\end{cases}$$

получим

$$D_{1x}^{-\alpha}D_{0x}^{-\alpha}u(x)=\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_x^1(s-x)^{\alpha-1}\int_0^s(s-t)^{\alpha-1}u(t)dtds=$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 (s-x)_+^{\alpha-1} \int_0^1 (s-t)_+^{\alpha-1} u(t)dtds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 u(t) \int_0^1 (s-t)_+^{\alpha-1}(s-x)_+^{\alpha-1} dsdt = \int_0^1 u(t)K(x,t)dt,$$

где

$$K(x,t) = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 (s-t)_+^{\alpha-1}(s-x)_+^{\alpha-1} ds = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_{\max\{x,t\}}^1 (s-t)^{\alpha-1}(s-x)^{\alpha-1} ds. \quad (4)$$

Принимая во внимание это обозначение, имеем

$$D_{1x}^{-\alpha} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_x^1 (s-x)^{\alpha-1} s^{\alpha-1} ds = K(x,0),$$

Теперь уравнение (4) примет вид

$$u(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)u(t)dt = C_1 K(x,0). \quad (5)$$

Для определения константы C_1 удовлетворим $u(x)$ первому из краевых условий (2), учитывая, что

$$K(0,0) = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 s^{2\alpha-2} ds = \frac{1}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}$$

получим

$$C_1 = -\lambda\mu \int_0^1 K(0,t)u(t)dt, \quad \mu = (2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha).$$

Подставляя C_1 в (5) имеем

$$u(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)u(t)dt = -\lambda\mu K(x,0) \int_0^1 K(0,t)u(t)dt.$$

Таким образом, мы показали, что решение задачи (1), (2) является решением уравнения

$$u(x) - \lambda \int_0^1 G(x,t)u(t)dt = 0, \quad (6)$$

где

$$G(x,t) = K(x,t) - \mu K(x,0)K(0,t). \quad (7)$$

Покажем, что любое решение уравнения (6) является решением задачи (1), (2). Перепишем (6) в виде

$$(\mathbf{G}u)(x) - \Lambda u(x) = 0, \quad (8)$$

где

$$(\mathbf{G}u)(x) = \mathbf{G}u = \int_0^1 G(x,t)u(t)dt, \quad \Lambda = \frac{1}{\lambda}.$$

Из (4) и (7) следует, что $G(x,t) \in C([0,1]\times[0,1])$. Отсюда следует, что $\mathbf{G} : L_2(0,1) \to C[0,1]$. Кроме того, очевидно, что

$$(\mathbf{G}u)(0) = (\mathbf{G}u)(1) = 0. \quad (9)$$

Далее, так как $K(1,t) \equiv 0$, $t \in [0,1]$, то

$$\partial_{1x}^{\alpha} K(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} D_{1x}^{\alpha-1} K(x,t).$$

Поэтому

$$\partial_{1x}^{\alpha} K(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} D_{1x}^{\alpha-1} K(x,t) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (\xi - x)_+^{-\alpha} \int_0^1 (s-\xi)_+^{\alpha-1} (s-t)_+^{\alpha-1} ds\, d\xi =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (s-t)_+^{\alpha-1} \int_0^1 (s-\xi)_+^{\alpha-1} (\xi - x)_+^{-\alpha} d\xi\, ds.$$

Отсюда, учитывая равенство

$$\int_0^1 (s-\xi)_+^{\alpha-1} (\xi-x)_+^{-\alpha} d\xi = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) H(s-x), \qquad H(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z \le 0, \end{cases}$$

получаем

$$\partial_{1x}^{\alpha} K(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (s-t)_+^{\alpha-1} H(s-x)\, ds =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\max\{x,t\}}^1 (s-t)^{\alpha-1}\, ds =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(1-t)^{\alpha} - (x-t)_+^{\alpha} \right] = \frac{(x-t)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Отсюда следует, что

$$\partial_{1x}^{\alpha} \mathbf{G} u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left[(x-t)_+^{\alpha-1} - \mu x^{\alpha-1} K(0,t) \right] u(t)\, dt =$$

$$= D_{0x}^{-\alpha} u(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 K(0,t) u(t)\, dt.$$

Таким образом, получаем, что $\partial_{1x}^{\alpha} \mathbf{G} u$ принадлежит области определения оператора D_{0x}^{α} и

$$D_{0x}^{\alpha} \partial_{1x}^{\alpha} \mathbf{G} u = D_{0x}^{\alpha} \left(D_{0x}^{-\alpha} u(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 K(0,t) u(t)\, dt \right) = u(x). \tag{10}$$

Применяя к обеим частям уравнения (6) оператор $D_{0x}^{\alpha} \partial_{1x}^{\alpha}$ получаем, что если $u(x)$ — решение уравнения (6), то $u(x)$ также является решением уравнения (1), и, учитывая (6), удовлетворяет условиям (2).

Из доказанного выше следует, что $\mathbf{G}$ — симметричный вполне непрерывный оператор в $L_2(0,1)$. Из теоремы Гильберта-Шмидта следует, что спектр оператора $\mathbf{G}$ не пуст, все собственные значения являются вещественными, множество собственных функций образуют полную ортогональную систему в пространстве M, где M ортогональное дополнение к ядру $\ker \mathbf{G}$, $M \oplus \ker \mathbf{G} = L_2(0,1)$. Из соотношения $\mathbf{G} u = 0$ в силу (7) следует, что $u = 0$, то есть $\ker \mathbf{G} = \{0\}$, и следовательно $M = L_2(0,1)$.

Для завершения доказательства необходимо показать, что все собственные значения оператора **G** положительны. Для этого рассмотрим выражение

$$(u,\mathbf{G}u)=\int_0^1 u(x)\int_0^1 G(x,t)u(t)dt\,dx=\int_0^1 u(x)\int_0^1\left[K(x,t)-\mu K(x,0)K(0,t)\right]u(t)dt\,dx.$$

Из равенств

$$\int_0^1 K(x,t)u(t)dt=D_{1x}^{-\alpha}D_{0x}^{-\alpha}u(x),\quad K(x,0)=K(0,x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}D_{1x}^{-\alpha}x^{\alpha-1},$$

получаем

$$(u,\mathbf{G}u)=\int_0^1 u(x)D_{1x}^{-\alpha}D_{0x}^{-\alpha}u(x)\,dx-\frac{\mu}{\Gamma^2(\alpha)}\left[\int_0^1 u(x)D_{1x}^{-\alpha}x^{\alpha-1}dx\right]^2.$$

В силу формулы дробного интегрирования по частям

$$\int_0^1 g(x)D_{1x}^{-\alpha}h(x)dx=\int_0^1 h(x)D_{0x}^{-\alpha}g(x)dx,$$

имеем

$$\int_0^1 u(x)D_{1x}^{-\alpha}D_{0x}^{-\alpha}u(x)\,dx=\int_0^1\left[D_{0x}^{-\alpha}u(x)\right]^2dx=\|v\|^2,$$

$$\int_0^1 u(x)D_{1x}^{-\alpha}x^{\alpha-1}dx=\int_0^1 x^{\alpha-1}D_{0x}^{-\alpha}u(x)\,dx=\left(v(x),x^{\alpha-1}\right),\quad v(x)=D_{0x}^{-\alpha}u(x).$$

Отсюда, учитывая, что $\mu=(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)$, получаем

$$(u,\mathbf{G}u)=\|v\|^2-(2\alpha-1)\left(v(x),x^{\alpha-1}\right)^2. \tag{11}$$

Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем, что

$$\left(v(x),x^{\alpha-1}\right)\le\|x^{\alpha-1}\|\,\|v\|. \tag{12}$$

Причем равенство в последнем неравенстве будет иметь место только, если $v(x)=const\cdot x^{\alpha-1}$. Из соотношений (8) и (9) следует, что

$$(u,\mathbf{G}u)\ge\|v\|^2\left(1-(2\alpha-1)\|x^{\alpha-1}\|^2\right).$$

Так как

$$\|x^{\alpha-1}\|^2=\int_0^1 x^{2\alpha-2}dx=\frac{1}{2\alpha-1},$$

то $(u,\mathbf{G}u)\ge 0$. Причем $(u,\mathbf{G}u)=0$ тогда и только тогда, когда $v(x)=const\cdot x^{\alpha-1}$, то есть $D_{0x}^{-\alpha}u(x)=const\cdot x^{\alpha-1}$, следовательно, когда $u(x)=0$. Это означает, что оператор **G** положительно определенный. Отсюда следует, что все собственные значения оператора **G**, а значит и собственные значения задачи (1), (2), положительны.

Библиографический список

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. Рехвиашвили С.Ш. К определению физического смысла дробного интегро- дифференцирования // Нелинейный мир. 2007. Т. 5. № 4. С. 194–197.

3. Рехвиашвили С.Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. № 2. С. 33–37.

4. Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives // Publications de l'institute mathématique, Nouvelle série, 80(94) (2006), 259-272

5. Atanackovic T.M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives // Fractional calculus and applied analysis, vol. 10, 2 (2007), 139-150.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 16.09.2015