Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). C. 13-16. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-13-16

УДК 517.95

О ЕДИНСТВЕННОСТИ АНАЛОГА ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

З.В. Кудаева

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Республика Кабардино-Балкария, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: kudaeva_zalina@mail.ru

В работе доказана единственность аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа в области, содержащей внутри себя две параллельные линии параболического вырождения.

Ключевые слова: принцип экстремума, аналог задачи Трикоми

MSC 35K57

ON THE UNIQNESS OF TRICOMI PROBLEM ANALOGUE FOR MIXED TYPE EQUATION WITH TWO DEGENERATED PARALLEL LINES

Z.V. Kudaeva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Republic of Kabardino-Balkariya, Nalchik, st. Shortanova, 89a

E-mail: kudaeva_zalina@mail.ru

In this paper the solution uniqness toTricomi problem analogue for the mixed type equation in a do-main containing two parallel lines with parabolic degeneration.

Key words: extremum principle, Tricomi problem analogue

Введение

В работе рассматривается уравнение смешанного типа второго порядка

$$signy(y-1)\cdot u_{xx}+u_{yy}=0, \tag{1}$$

в смешанной области, содержащей интервалы двух непересекающихся линий изменения типа. В качестве моделей такого вида уравнений могут выступать следующие уравнения:

$$signy(1-y)\cdot u_{xx}+u_{yy}=0, \tag{2}$$

$$y(y-1)u_{xx}+u_{yy}=0, \tag{3}$$

$$y(1-y)u_{xx}+u_{yy}=0. \tag{4}$$

Уравнения (1) и (2) являются естественным аналогом уравнения Лаврентьева-Бицадзе $signy\cdot u_{xx}+u_{yy}=0$, а уравнения (3) и (4) в определенном смысле представляют собой аналог уравнения Трикоми $yu_{xx}+u_{yy}=0$.

Первые результаты для уравнения (3) были получены А.М.Нахушевым [1],[2].

Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с двумя параллельными линиями вырождения

Уравнение (1) рассмотрим в смешанной области Ω, ограниченной характеристиками $A_0C_0: x+y=0$, $0\leq x\leq r/2$, $B_0C_0: x-y=r$, $r/2\leq x\leq r$, $A_1C_1: y-x=1$, $0\leq x\leq r/2$ и $B_1C_1: x+y=r+1$, $r/2\leq x\leq r$; кривыми Жордана σ_0 с концами в точках $A_0=(0,0)$ и $A_1=(0,1)$ и σ_1 с концами в точках $B_0=(r,0)$ и $B_1=(r,1)$, расположенными в полосе $0<y<1$ евклидовой плоскости точек (x,y) (см. рисунке).

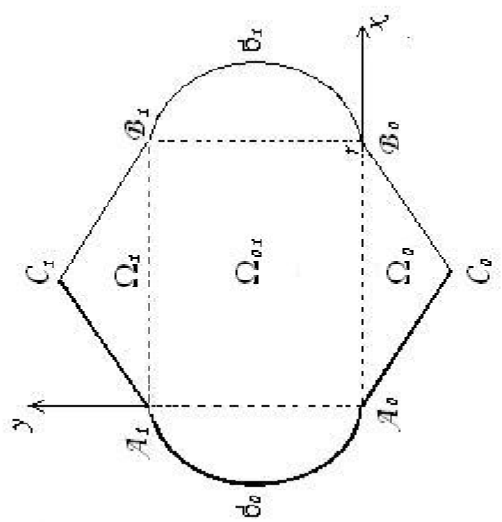

Рисунок. Область Ω с характеристиками

Уравнение (1) является уравнением в частных производных второго порядка смешанного типа. Оно эллиптического типа в полосе $0<y<1$ и гиперболического типа вне этой полосы. Прямые $y=0$ и $y=1$ представляют собой линии параболического вырождения, где коэффициент $k(y)=signy(y-1)$ при старшей производной u_{xx} претерпевает разрыв первого рода.

Через Ω_0 и Ω_1 обозначим части области Ω, лежащие в полуплоскости $y<0$ и $y>1$ соответственно, где уравнение (1) совпадает с волновым уравнением

$$u_{xx}-u_{yy}=0. \tag{5}$$

Через Ω_{01} обозначим часть области Ω, лежащую в полосе $0<y<1$, где уравнение (1) совпадает с уравнением Лапласа

$$u_{xx}+u_{yy}=0. \tag{6}$$

Аналогом задачи Трикоми является

Задача 1. *Найти регулярное в областях Ω_{01}, Ω_0, Ω_1 решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:*

$$u\,|_{\sigma_0}=\varphi_0(x,y),\quad u\,|_{\sigma_1}=\varphi_1(x,y), \tag{7}$$

$$u\,|_{A_1C_1}=\psi_1(x,y),\ \ 0\leq x\leq r/2, \tag{8}$$

$$u\,|_{A_0C_0}=\psi_0(x,y),\ \ 0\leq x\leq r/2, \tag{9}$$

где $\varphi_0(x,y)$, $\varphi_1(x,y)$, $\psi_0(x,y)$, $\psi_1(x,y)$ – заданные функции.

Имеет место следующий

Аналог принципа экстремума А.В. Бицадзе:

Решение $u(x,y)$ задачи 1, равное нулю на характеристиках A_1C_1 и A_0C_0, положительный максимум (отрицательный минимум) в замыкании области $\overline{\Omega}_{01}$ принимает на $\sigma_1\cup\sigma_0$.

В области Ω_1 функция $u(x,y)$ как решение уравнения (5) представима в виде $u(x,y)=f_1(x-y)-f_1(-1)$, где $f_1(x)\in C[-1,r-1]\cap C^2]-1,r-1[$. Поэтому функции $\tau_1(x)=u(x,1)$ и $\nu_1(x)=u_y(x,1)$ связаны уравнением

$$\tau_1'(x)+\nu_1(x)=0,\ \ 0<x<r. \tag{10}$$

На компакте $\overline{\Omega}_{01}$ положительный максимум (отрицательный минимум) функции $u(x,y)$ может достигаться только на границе. Допустим, что положительный максимум (отрицательный минимум) $u(x,y)$ на компакте $\overline{\Omega}_{01}$ достигается в точке $(x_1,1)$, $0<x<1$ отрезка A_1B_1. Тогда $\tau_1'(x_1)=0$, и из (10) следует, что и $\nu_1(x_1)=0$. Но в соответствии с принципом Заремба [3, с.85] для уравнения (5) $\nu_1(x_1)>0$ ($\nu_1(x_1)<0$). Таким образом положительный максимум (отрицательный минимум) $u(x,y)$ на компакте $\overline{\Omega}_{01}$ в точках $(x_1,1)$, $0<x_1<1$ не достигается.

В области Ω_0 функция $u(x,y)$, как решение волнового уравнения (5), представима в виде $u(x,y)=f_0(x+y)-f_0(0)$, где $f_0(x)\in C[0,r]\cap C^2]0,r[$. Поэтому функции $\tau_0(x)=u(x,0)$ и $\nu_0(x)=u_y(x,0)$ связаны уравнением

$$\tau_0'(x)-\nu_0(x)=0,\ \ 0<x<r. \tag{11}$$

Предположим, что положительный максимум (отрицательный минимум) функции $u(x,y)$ на компакте Ω_{01} достигается в точке x_0, $0 < x_0 < r$ на отрезке A_0B_0. Тогда $\tau_0'(x_0) = 0$ и из (11) следует, что и $\nu_0(x_0) = 0$. Но в соответствии с принципом Зарембы для уравнения (5) $\nu_0(x_0) < 0$.

Таким образом, положительный максимум (отрицательный минимум) $u(x,y)$ может достигаться только на $\sigma_0 \cup \sigma_1$.

Справедлива следующая теорема единственности решения задачи 1.

Теорема. *Задача 1 имеет не более одного решения.*

Действительно, пусть $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ – решение задачи 1. Тогда разность $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ является решением однородной задачи. Из доказанного аналога принципа экстремума, следует, что положительный максимум (отрицательный минимум) функции $u(x,y)$ достигается на σ_0, σ_1, где $u(x,y) = 0$, следовательно, $u_1(x,y) = u_2(x,y)$.

Задача 2. *Найти регулярное в областях Ω_{01}, Ω_0, Ω_1 решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее краевым условиям (7), (9) и условию*

$$u\,|_{B_1C_1} = \psi_1(x,y), \;\; 0 \le x \le r/2. \tag{12}$$

Аналогично задаче 1 доказывается, что задача 2 имеет не более одного решения.

Существование решений задач 1 и 2 можно доказать методом их редукции к задаче Римана-Гильберта для аналитической в области Ω_1 функции комплексного переменного $z = x + iy$, методом, предложенным А.В. Бицадзе [4, с.8] при решении задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе.

Существование решений задач 1 и 2 при дополнительных предположениях гладкости на кривых σ_0, σ_1 можно доказать и методом редукции к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно функций $\tau_0(x)$, $\nu_0(x)$, $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$.

Библиографический список

1. Нахушев А.М. Краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения// ДАН СССР. 1966. Т.170, № 1. С. 38–40.

2. Нахушев А.М. Об одной задаче смешанного типа для уравнения $y(y-1)u_{xx} + u_{yy}$// ДАН СССР. 1966. Т.166, № 3. С. 536–539.

3. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Из-во АН ССР, 1959. – 164 с.

4. Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа// Труды Мат.ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова.– М. 1953. Т. 41, С. 1-58.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 30.09.2015