Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 1(12). C. 41-47. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-12-1-41-47

УДК 517.953

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

А. В. Юлдашева

Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. ВУЗ городок

E-mail: yuasv86@mail.ru

В статье рассматривается краевая задача для уравнения четного порядка. Доказывается однозначная разрешимость при дополнительных условиях и условиях на область.

Ключевые слова: уравнения в частных производных высокого порядка, краевая задача, метод разделения переменных, цепные дроби

MSC 35C05

ON SOLVABILITY OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE EVEN-ORDER EQUATION

A. V. Yuldasheva

National University of Uzbekistan by Mirzo Ulugbeka, 100174, Uzbekistan, Tashkent c., VUZ gorodok st.

E-mail: yuasv86@mail.ru

In this paper boundary-value problem for one even-order equation is studied. The unique solvability of the problem is restored by additional conditions and conditions to domain.

Key words: partial differential equations of higher order, boundary-value problem, method of separation of variables, simple continued fractions

Постановка задачи

Для уравнения

$$Lu = f(x,t), \tag{1}$$

где

$$Lu \equiv \frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^{2p}u}{\partial t^{2p}}, \quad k,p \in N \tag{2}$$

в области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < a,\ 0 < t < T\}$ исследуется следующая краевая задача.

Задача. *Найти в области Ω решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}(0,t) = \frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}}(a,t) = 0, 0 \le t \le T, m = \overline{0,k-1} \tag{3}$$

и

$$\frac{\partial^{2m}u}{\partial t^{2m}}(x,0) = \frac{\partial^{2m}u}{\partial t^{2m}}(x,T) = 0, 0 \le x \le a, m = \overline{0,p-1}. \tag{4}$$

Заметим, что корректность задачи зависит от значений k,p. Так, если $(k-p)$ четное, то вообще говоря, задача некорректна. Устойчивость такой задачи исследована в работе [1]. Если $k = p = 1$, то задача (1),(3), (4) будет задачей Дирихле для уравнения колебания струны, разрешимость которой исследована в [3]. Случай, когда $k \in N$, $p = 1$ рассмотрен в [2, 7], а случай $k = p$ исследован в [4, 5].

Случай нечетности $(k-p)$

Лемма 1. *Пусть $u(x,t)$ – регулярное решение задачи (1),(3), (4) и $(k-p)$ нечетное, тогда справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^{k,p}(\Omega)} \le C\|Lu\|_{L_2(\Omega)}, \tag{5}$$

где $C > 0$ - постоянное число, зависящее от размеров области Ω и k,p, но не зависящее от функции $u(x,t)$.

Доказательство. Умножим обе части уравнения (2) на $(-1)^k u$ и проинтегрируем по области Ω

$$\int_0^T\int_0^a \left[\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k+i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{2k-1-i}u}{\partial x^{2k-1-i}}\cdot\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right) + \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{k+i}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{2p-1-i}u}{\partial t^{2p-1-i}}\cdot\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right) - (-1)^{k+p}\left(\frac{\partial^p u}{\partial t^p}\right)^2\right] dxdt = \iint_\Omega (-1)^k uLudxdt.$$

Применяя неравенство $2|ab| \le \varepsilon a^2 + \dfrac{b^2}{\varepsilon}$ $(\varepsilon = const > 0)$ к правой части последнего равенства, а также учитывая условия (3) и (4), имеем

$$\int_0^a\int_0^T \left(\left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)^2 + \left(\frac{\partial^p u}{\partial t^p}\right)^2\right) dxdt \le \frac{\varepsilon}{2}\int_0^a\int_0^T u^2(x,t)\,dxdt + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^a\int_0^T (Lu)^2 dxdt,$$

получим

$$\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^p u}{\partial t^p}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{6}$$

По определению норма $\left\|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right\|^2_{L_2(\Omega)}$, $m = 1,\cdots,k-1$ равна

$$\left\|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_0^T\int\limits_0^a \frac{\partial^{m+1}u}{\partial x^{m+1}}\cdot\frac{\partial^{m-1}u}{\partial x^{m-1}}dxdt.$$

Применяя к правой части последнего равенства неравенство

$$|ab| \le \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right),$$

находим

$$\left\|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^{m+1}}\right\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{7}$$

Суммируя неравенства (7) по m от 1 до $k-1$, получим

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{8}$$

Применяя (7) к неравенству (8) находим

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{9}$$

Теперь суммируя (7) по m от 2 до $k-2$, согласно (9) имеем

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^{k-2} u}{\partial x^{k-2}}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{10}$$

Продолжая аналогично, мы получим оценки для всех $\left\|\frac{\partial^m u}{\partial x^m}\right\|^2_{L_2(\Omega)}$, $m = 1,\ldots,k-1$, складывая которые с (6), (9), (6), получим

$$\sum_{i=1}^{k}\left\|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon k}{4}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{k}{4\varepsilon}\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{11}$$

Поступая аналогично, только заменив x на t, а k на p, находим

$$\sum_{i=1}^{p}\left\|\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon p}{4}\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{p}{4\varepsilon}\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{12}$$

Оценим $\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$

$$u^2(x,t) = \int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial\xi}\left(u^2(\xi,t)\right)d\xi \le 2\int\limits_0^a |u|\,|u_x|\,dx,$$

$$\int_0^T u^2(x,t)dt \le 2\int_0^T\int_0^a |u|\,|u_x|\,dxdt \le 2\|u\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|u_x\|_{L_2(\Omega)}.$$

Интегрируя последнее неравенство по x от 0 до p и деля на $\|u\|_{L_2(\Omega)}$, получаем

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \le 4a^2\,\|u_x\|^2_{L_2(\Omega)}\,.$$

Откуда согласно (9) находим

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \le 4a^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\,\|u\|^2_{L_2(\Omega)}+\frac{1}{2\varepsilon}\,\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}\right).$$

Складывая последнее неравенство с (11) и (12), и выбирая

$$\varepsilon=\frac{2}{k+p+8a^2},$$

получим

$$\sum_{i=0}^{k}\left\|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{p}\left\|\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le C^2\,\|Lu\|^2_{L_2(\Omega)}\,. \tag{13}$$

где $C^2=\dfrac{\left(k+p+8a^2\right)^2}{8}$. Извлекая корень из (13), получаем

$$\|u\|_{W_2^{k,p}(\Omega)} \le C\|Lu\|_{L_2(\Omega)}.$$

□

Следствие. Из леммы 1 следует единственность и непрерывная зависимость регулярного решения задачи от правой части $f(x,t)$ при нечетных значениях $(k-p)$.

Теорема 1. *Пусть $(k-p)$ нечетное и функция $f(x,t)\in C^{k+1,p+1}_{x,\,t}(\Omega)$ удовлетворяет следующим краевым условиям*

$$\frac{\partial^{2m}f(0,t)}{\partial x^{2m}}=\frac{\partial^{2m}f(a,t)}{\partial x^{2m}}=0,\forall t\in[0;T],$$

$m=0,1,\cdots,\dfrac{k}{2}$, *если k четное и* $m=0,1,\cdots,\dfrac{k-1}{2}$, *если k нечетное*

$$\frac{\partial^{2m}f(x,0)}{\partial t^{2m}}=\frac{\partial^{2m}f(x,T)}{\partial t^{2m}}=0,\forall x\in[0;a],$$

$m=0,1,\cdots,\dfrac{p}{2}$, *если p четное и* $m=0,1,\cdots,\dfrac{p-1}{2}$, *если p нечетное. Тогда решение задачи (1), (3),(4) существует.*

Доказательство. Функцию, удовлетворяющую условиям (3), (4) можно представить в виде

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2u_{nm}}{\sqrt{aT}}\sin\frac{\pi n}{a}x\cdot\sin\frac{\pi m}{T}t. \tag{14}$$

Подставляя в (1), имеем

$$\left[(-1)^k\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k}-(-1)^p\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]u_{nm}=f_{nm}, \tag{15}$$

где $f_{nm} = \iint\limits_{\Omega} \frac{2}{\sqrt{aT}} \sin\left(\frac{x\pi n}{a}\right) \sin\left(\frac{t\pi m}{T}\right) f(x,t)\, dxdt$. Из (14) при четном k и нечетном p находим

$$u_{nm} = \frac{f_{nm}}{\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} + \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]},$$

а при нечетном k и четном p

$$u_{nm} = -\frac{f_{nm}}{\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} + \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]}.$$

Итак, формальное решение задачи (1),(3), (4) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{aT}} \cdot \frac{(-1)^k f_{nm}}{\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} + \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]} \sin\frac{\pi n}{a}x \cdot \sin\frac{\pi m}{T}t. \tag{16}$$

Осталось доказать равномерную сходимость ряда (16), а также рядов

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{aT}} \cdot \frac{f_{nm}}{\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} + \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]} \left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} \sin\frac{\pi n}{a}x \cdot \sin\frac{\pi m}{T}t, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2p}}(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{aT}} \cdot \frac{-f_{nm}}{\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} + \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]} \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p} \sin\frac{\pi n}{a}x \cdot \sin\frac{\pi m}{T}t \tag{18}$$

В силу оценки

$$\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} + \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p} \geq 2\frac{\pi^{k+p} n^k m^p}{a^k T^p},$$

находим

$$|u_{nm}| \leq \frac{a^k T^p}{2\pi^{k+p} n^k m^p} |f_{nm}|.$$

Тогда ряд мажорантный ряду (16) имеет вид

$$\frac{a^k T^p}{\pi^{k+p}\sqrt{aT}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_{nm}|\, n^k}{m^p},$$

откуда в силу условий наложенных на функцию $f(x,t)$ следует равномерная сходимость ряда (16), а также рядов (17) и (18). Теорема доказана. □

Случай четности $(k-p)$.

Теорема 2. *Пусть $(k-p)$ четное и функция $f(x,t) \in C^{2k+5,\,2p+3}_{x,\quad t}(\Omega)$ удовлетворяет следующим краевым условиям*

$$\frac{\partial^{2m} f(0,t)}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial^{2m} f(a,t)}{\partial x^{2m}} = 0, \forall t \in [0;T],$$

$m=0,1,\cdots,k+1$, *если* k *четное и* $m=0,1,\cdots,k+2$, *если* k *нечетное,*

$$\frac{\partial^{2m} f(x,0)}{\partial t^{2m}}=\frac{\partial^{2m} f(x,T)}{\partial t^{2m}}=0, \forall x\in[0;a],$$

$m=0,1,\cdots,p$ *если* p *четное и* $m=0,1,\cdots,p+1$, *если* p *нечетное. Если числа* a *и* T *таковы, что число* $\dfrac{a^k}{T^p\pi^{k-p}}$ *является алгебраическим числом степени* $n\geq 2$, *то решение задачи* (1), (3),(4) *существует и единственно.*

Доказательство. Аналогично, как и в теореме 1 решение ищем в виде (14), подставляя которое в (1), получим (15) .

Из (15) при четных k и p находим

$$u_{nm}=\frac{f_{nm}}{\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k}-\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]},$$

а при нечетных k и p

$$u_{nm}=-\frac{f_{nm}}{\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k}-\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]}.$$

Итак, формальное решение задачи (1), (3), (4) при четных значениях $(k-p)$ имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{aT}}\cdot\frac{(-1)^k f_{nm}}{\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k}-\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]}\sin\frac{\pi n}{a}x\cdot\sin\frac{\pi m}{T}t \tag{19}$$

Осталось доказать равномерную сходимость ряда (19), а также рядов полученных из (19) дифференцированием $2k$ раз по x и $2p$ раз по t.

Для начала оценим разность

$$\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k}-\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]=\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{k}-\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{p}\right]\cdot\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{k}+\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{p}\right]=$$

$$=\frac{\pi^k m^p}{a^k}\left[\frac{n}{m^p}^k-\frac{a^k}{T^p\pi^{k-p}}\right]\cdot\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{k}+\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{p}\right].$$

В силу того, что число $\dfrac{a^k}{T^p\pi^{k-p}}$ является алгебраическим числом степени $n\geq 2$, то оно удовлетворяет следующей оценке

$$\left|\frac{n}{m^p}^k-\frac{a^k}{T^p\pi^{k-p}}\right|\geq\frac{C}{m^{2p}}.$$

Тогда получаем,

$$\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k}-\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]\geq\frac{C_0\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k}+\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}}}{m^{\frac{p}{2}}}$$

или в силу того что число $\dfrac{T^p\pi^{k-p}}{a^k}$ также является алгебраическим числом степени $n\geq 2$, находим

$$\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k}-\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]\geq\frac{C_1\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k}+\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}}}{n^{\frac{k}{2}}}.$$

Т.е.

$$\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k}-\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]\geq\min\left(\frac{C_0\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k}+\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}}}{m^{\frac{p}{2}}};\frac{C_1\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k}+\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}}}{n^{\frac{k}{2}}}\right).$$

Итак

$$|u_{nm}|\leq 2\frac{Cn^k m^p}{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k}+\left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}}|f_{nm}|.$$

Откуда в силу условий наложенных на функцию $f(x,t)$ следует равномерная сходимость ряда (19). Теорема доказана. □

Список литературы

[1] Юлдашева А. В., “Об устойчивости краевой задачи для уравнения четного порядка”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2015, № 1(10), 5–11; *Bulletin KRASEC. Phys. & Math. Sci.*, **10**:1 (2015), 4–10.

[2] Amanov Dj., Yuldasheva A. V., “Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order”, *International Journal of Computer Mathematics*, **38** (2009), 61–70.

[3] Березанский Ю. М., “Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка”, Тр. ММО, **5**, ГИТТЛ, М., 1956, 203–268.

[4] Сабитов К. Б., “Задача Дирихле для двумерных уравнений в частных производных высших порядков”, *Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики*, Материалы международного Российско-Болгарского симпозиума (Нальчик–Хабез), Изд-во НИИ ПМА КБНЦ РАН, Нальчик–Хабез, 2010, 212–214.

[5] Сабитов К. Б., “Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков и проблема Ферма”, Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского, **41**, Изд-во Казанского математического общества, Казань, 2010, 98–102.

[6] Шидловский А. Б., *Трансцендентные числа*, Наука, М., 1987, 448 с.

[7] Юлдашева А. В., “Об одной задаче для уравнения высокого порядка”, *Доклады Академии наук Республики Узбекистан*, 2012, № 5, 11–14.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 23.11.2015