Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 1(12). C. 32-40. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-12-1-32-40

УДК 517.956.6

ПОСТАНОВКА И ИЗУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВИДА $\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0$ В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

М. Мамажонов, Х. Б. Мамадалиева

Кокандский государственный педагогический институт им. Мукимий, 113000, Узбекистан, г. Коканд, ул. Амира Темура, 37

E-mail: bek84-08@mail.ru

В настоящей работе ставятся две краевые задачи, и исследуется одна из этих задач для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида $\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0$ в пятиугольной области. Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи.

Ключевые слова: дифференциальные и интегральные уравнения,краевые задачи, параболо-гиперболический тип

MSC 35M13

STATEMENT AND STUDY OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THIRD ORDER EQUATION OF PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE TYPE $\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0$ IN A PENTAGONAL AREA

M. Mamazhonov, Kh. B. Mamadalieva

Kokand State Pedagogical Institute. Muqimiy, 113000, Uzbekistan, Kokand, st. Amir Temur, 37

E-mail: bek84-08@mail.ru

In this paper we put two boundary value problems, and examines one of these problems for the equation of the third order parabolic-hyperbolic type $\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0$ in a pentagonal area. We prove the unique solvability of the problem

Key words: differential and integral equations, boundary problems, parabolic-hyperbolic type

Введение

При решении краевых задач математической физики применяются методы дифференциальных и интегральных уравнений. Настоящая статья является примером применения этих методов к решению одной краевой задачи для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области.

Постановка задачи

Рассмотрим область D на плоскости xOy, где $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup \cup AB \cup AE_2 \cup AE_1 \cup AA_0 \cup \{(0,0)\}$, а D_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$, D_2 – треугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $E_1(0,-1)$, D_3 – треугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $E_1(0,-1)$, $E_2(-1,0)$, D_4 – треугольник с вершинами в точках $A(0,0)$, $A_0(0,1)$, $E_2(-1,0)$, AB – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$, AE_2 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0,0)$ и $E_2(-1,0)$, AE_1 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0,0)$ и $E_1(0,-1)$, AA_0 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0,0)$ и $A_0(0,1)$.

Рассмотрим в области D уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0, \tag{1}$$

где

$$Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x,y) \in D_i, \ i = 2,3,4. \end{cases}$$

Введем следующее обозначение: $u(x,y) = u_i(x,y)$, $(x,y) \in D_i (i = 1, 2.3, 4)$.

Рассмотрим следующую задачу для уравнения (1):

Задача 1. *Найти функцию $u(x,y)$, которая*

1) непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в области D при $x \neq 0$ и $y \neq 0$;

3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u_1(1,y) = \varphi_1(y), \ 0 \le y \le 1, \tag{2}$$

$$u_2|_{BE_1} = \psi_1(x), \ 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

$$u_4|_{A_0C_3} = \psi_2(x), \ -\frac{1}{2} \le x \le 0 \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{BE_1} = \psi_4(x), \ 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u_4}{\partial n}\right|_{A_0E_2} = \psi_6(x), \ -1 \le x \le 0, \tag{6}$$

4) удовлетворяет следующим непрерывным условиям склеивания:

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = \tau_1(x), \ 0 \le x \le 1, \tag{7}$$

$$u_{1y}(x,-0)=u_{2y}(x,+0)=\nu_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{8}$$

$$u_3(x,0)=u_4(x,0)=\tau_2(x),\ -1\le x\le 0, \tag{9}$$

$$u_{3y}(x,0)=u_{4y}(x,0)=\nu_2(x),\ -1\le x\le 0 \tag{10}$$

$$u_1(0,y)=u_4(0,y)=\tau_4(y),\ 0\le y\le 1, \tag{11}$$

$$u_{1x}(0,y)=u_{4x}(0,y)=\nu_4(y),\ 0\le y\le 1, \tag{12}$$

$$u_{1xx}(0,y)=u_{4xx}(0,y)=\mu_4(y),\ 0\le y\le 1, \tag{13}$$

$$u_2(0,y)=u_3(0,y)=\tau_3(y),\ -1\le y\le 0, \tag{14}$$

$$u_{2x}(0,y)=u_{3x}(0,y)=\nu_3(y),\ -1\le y\le 0, \tag{15}$$

$$u_{2xx}(0,y)=u_{3xx}(0,y)=\mu_3(y),\ -1\le y\le 0. \tag{16}$$

Здесь n – внутренняя нормаль к прямым BE_1 или E_1E_2, $\varphi_1,\psi_1,\psi_2,\psi_4,\psi_6$ – заданные достаточно гладкие функции, а $\tau_j,\ \nu_j\ (j=1,2,3,4)$, μ_1,μ_2 – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению, причем выполняются следующие условия согласования: $\psi_4'(0)=-\psi_5'(0)$, $\tau_1(1)=\psi_1(1)=\varphi(0)$, $\tau_1'(1)=\varphi'(0)-\sqrt{2}\psi_4(1)$, $\tau_1''(1)=\varphi''(0)-\sqrt{2}\psi_4'(1)$.

Задача 2. *Эта задача отличается от **Задачи 1** тем, что вместо условия (4) берется условие:*

$$u_3\,|_{E_2C_2}=\psi_3(x),-1\le x\le -\frac{1}{2}.$$

Остальные условия остаются без изменений.

В этой работе рассмотрим только **Задачу 1**. Для решения поставленной уравнение (1) запишем в виде:

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_1(y),\ (x,y)\in D_1, \tag{17}$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_i(y),\ (x,y)\in D_i\ \ (i=2,3,4), \tag{18}$$

где введено обозначение: $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in D_i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$, а $\omega_i(y)\ \left(i=\overline{1,4}\right)$ – неизвестные пока непрерывные функции.

Области $D_i\ (i=2,3,4)$ запишем в следующем виде: $D_i=D_{i1}\cup D_{i2}\cup AC_{i-1}$, где D_{21} – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, D_{22} – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $E_1(0;-1)$, $C_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, D_{31} – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $E_1(0;-1)$, $C_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, D_{32} – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $E_2(-1;0)$, $C_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, D_{41} – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $A_0(0;1)$, $C_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, D_{42} – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $E_2(-1;0)$, $C_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, AC_1 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0;0)$,

$C_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, AC_2- открытый отрезок с вершинами в точках $A(0;0)$, $C_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, AC_3- открытый отрезок с вершинами в точках $A(0;0)$, $C_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, то есть $AC_1=\left\{(x,y)\in R^2:\ 0<x<\frac{1}{2},\ y=-x\right\}$, $D_{21}=\left\{(x,y)\in R^2:\ -\frac{1}{2}<y<0,\ -y<x<y+1\right\}$, $D_{22}=\left\{(x,y)\in R^2:\ 0<x<\frac{1}{2},\ x-1<y<-x\right\}$, $AC_2=\left\{(x,y)\in R^2:\ -\frac{1}{2}<x<0,\ y=x\right\}$, $D_{31}=\left\{(x,y)\in R^2:\ -\frac{1}{2}<x<0,\ -x-1<y<x\right\}$, $D_{32}=\left\{(x,y)\in R^2:\ -\frac{1}{2}<y<0,\ -y-1<x<y\right\}$, $AC_3=\left\{(x,y)\in R^2:\ -\frac{1}{2}<x<0,\ y=-x\right\}$,$D_{41}=\left\{(x,y)\in R^2:\ -\frac{1}{2}<x<0,\ -x<y<x+1\right\}$, $D_{42}=\left\{(x,y)\in R^2:\ 0<y<\frac{1}{2},\ y-1<x<-y\right\}$.

Тогда уравнение (18) $(i=2,3,4)$ примет следующий вид:

$$u_{ikxx}-u_{ikyy}=\omega_{ik}(y),\ (x,y)\in D_{ik}\ (i=2,3,4;\ k=1,2),\tag{19}$$

где введены обозначения $u_i(x,y)=u_{ik}(x,y)$, $\omega_i(y)=\omega_{ik}(y)$, $(x,y)\in D_{ik}$ $(i=2,3,4;\ k=1,2)$.

Сначала **Задачу 1** будем исследовать в области D_2. Запишем решение уравнения (19) $(i=2;\ k=1)$, удовлетворяющее условиям (7), (8):

$$u_{21}(x,y)=\frac{\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu_1(t)\,dt-\int\limits_{0}^{y}(y-\eta)\,\omega_{21}(\eta)\,d\eta.\tag{20}$$

Условие (5) можно записать в следующем виде:

$$\left.\left(\frac{\partial u_{21}}{\partial x}-\frac{\partial u_{21}}{\partial y}\right)\right|_{y=x-1}=-\sqrt{2}\psi_4(x).\tag{21}$$

Дифференцируя уравнение (20) по x и y, и подставляя их в (21), после некоторых преобразований находим

$$\omega_{21}(y)=-\sqrt{2}\psi_4'(y+1),\ -\frac{1}{2}\le y\le 0.\tag{22}$$

Теперь подставляя (20) в (3) и дифференцируя полученное соотношение и затем в полученном соотношении заменяя $2x-1$ на x, приходим к уравнению

$$\nu_1(x)=-\tau_1'(x)+\alpha_1(x),\ 0\le x\le 1,\tag{23}$$

где $\alpha_1(x)$ – известная функция.

Далее, переходя в уравнении (17) к пределу при $y\to 0$, получим:

$$\tau_1''(x)-\nu_1(x)=\omega_1(0),\ 0\le x\le 1,$$

где $\omega_1(0)$ неизвестное пока постоянное число. Подставляя (23) в последнее равенство, получим уравнение

$$\tau_1''(x)+\tau_1'(x)=\alpha_1(x)+\omega_1(0),\ 0\le x\le 1.$$

Интегрируя это уравнение от 1 до x, имеем

$$\tau_1'(x)+\tau_1(x)=\int\limits_{1}^{x}\alpha_1(t)\,dt+\omega_1(0)(x-1)+b,\ 0\le x\le 1,$$

где b неизвестное пока постоянное число. Решая это уравнение при условиях

$$\tau_1(1)=\psi_1(1)=\varphi(0),\tau_1'(1)=\varphi'(0)-\sqrt{2}\psi_4(1),\tau_1''(1)=\varphi''(0)-\sqrt{2}\psi_4'(1),$$

получим:

$$\tau_1(x)=\int\limits_1^x(1-\exp(t-x))\,\alpha_1(t)\,dt+\omega_1(0)(x-2+\exp(1-x))+ \tag{24}$$

$$+b(1-\exp(1-x))+c\exp(1-x)$$

где

$$c=\varphi(0),b=\varphi'(0)+\varphi(0)-\sqrt{2}\psi_4(1),$$

$$\omega_1(0)=\varphi_1''(0)-\sqrt{2}\psi_4'(1)+\varphi'(0)-\sqrt{2}\psi_4(1)-\psi_1'(1).$$

Таким образом, мы нашли функцию $\tau_1(x)$, а следовательно и функции $\nu_1(x)$, $u_{21}(x,y)$.

Теперь переходим в область D_{22}. Запишем решение уравнения (19) ($i=2$; $k=2$), удовлетворяющее условиям (14), (15):

$$u_{22}(x,y)=\frac{\tau_3(y+x)+\tau_3(y-x)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x}\nu_3(t)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^x d\eta\int\limits_{y-x+\eta}^{y+x-\eta}\omega_{22}(\xi)\,d\xi. \tag{25}$$

Дифференцируя (25) по x и y и подставляя их в (21), после некоторых преобразований находим:

$$\omega_{22}(y)=-\sqrt{2}\psi_4'(y+1),\ -1\le y\le -\frac{1}{2} \tag{26}$$

Теперь будем пользоваться из условия $\left(\frac{\partial u_{22}}{\partial x}+\frac{\partial u_{22}}{\partial y}\right)\Big|_{y=-x}=\left(\frac{\partial u_{21}}{\partial x}+\frac{\partial u_{21}}{\partial y}\right)\Big|_{y=-x}$.

$$\tau_3'(0)+\nu_3(0)+\int\limits_0^x\omega_{22}(-\eta)\,d\eta=\tau_1'(0)+\nu_1(0)-\int\limits_0^{-x}\omega_{21}(\eta)\,d\eta.$$

Дифференцируя это равенство и в полученном равенстве заменяя $-x$ на y и учитывая (22), получим $\omega_{22}(y)=-\sqrt{2}\psi_4'(y+1)$, $-\frac{1}{2}\le y\le 0$. Из этого равенства и (26) видно, что

$$\omega_{22}(y)=-\sqrt{2}\psi_4'(y+1),\ -1\le y\le 0.$$

Далее, подставляя (25) в (3) и дифференцируя полученное равенство, имеем

$$\tau_3'(y)+\nu_3(y)=\delta_1(y),\ -1\le y\le 0, \tag{27}$$

где $\delta_1(y)$ – известная функция.

Теперь используем условие $u_{22}(x,-x)=u_{21}(x,-x)$, где $u_{21}(x,-x)$ – известная функция.

Подставляя (25) в это условие и дифференцируя полученное равенство, затем в продифференцированном равенстве заменяя $-2x$ на y, получим следующее соотношение:

$$\tau_3'(y)-\nu_3(y)=\delta_2(y),\ -1\le y\le 0, \tag{28}$$

здесь $\delta_2(y)$ – известная функция.

Из (27) и (28) находим:

$$\nu_3(y) = \frac{1}{2}[\delta_1(y) - \delta_2(y)], \ -1 \le y \le 0. \tag{29}$$

Интегрируя

$$\tau_3'(y) = \frac{1}{2}[\delta_1(y) + \delta_2(y)], \ -1 \le y \le 0.$$

последнее равенство от -1 до y, получим:

$$\tau_3(y) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{y}[\delta_1(\eta) + \delta_2(\eta)]\,d\eta + \tau_1(0), \ -1 \le y \le 0 \tag{30}$$

где положено $\tau_3(0) = \tau_1(0)$.

Таким образом, мы нашли функцию $u_{22}(x,y)$, а следовательно – и функцию $u_2(x,y)$ полностью.

Теперь переходим в область D_3. Если в уравнениях (19) $(i=2;\ k=2)$ и (19) $(i=3;\ k=1)$ перейти к пределу при $x \to 0$, то мы получим уравнения $\mu_3(y) - \tau_3''(y) = \omega_{22}(y)$, $\mu_3(y) - \tau_3''(y) = \omega_{31}(y)$. Из этих соотношений видно, что

$$\omega_{31}(y) = \omega_{22}(y) = -\sqrt{2}\psi_4'(y+1), \ -1 \le y \le 0.$$

Следовательно, функция $u_{31}(x,y)$ уже станет известной. Она определяется по формуле:

$$u_{31}(x,y) = \frac{\tau_3(y+x) + \tau_3(y-x)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x}\nu_3(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}d\eta\int\limits_{y-x+\eta}^{y+x-\eta}\omega_{31}(\xi)\,d\xi. \tag{31}$$

Далее, будем пользоваться условиями: $\left.\left(\frac{\partial u_{32}}{\partial x} - \frac{\partial u_{32}}{\partial y}\right)\right|_{y=x} = \left.\left(\frac{\partial u_{31}}{\partial x} - \frac{\partial u_{31}}{\partial y}\right)\right|_{y=x}$.

Запишем решение уравнения (19) $(i=3;\ k=2)$, удовлетворяющее условиям (9),(10):

$$u_{32}(x,y) = \frac{\tau_2(x+y) + \tau_2(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu_2(t)\,dt - \int\limits_{0}^{y}(y-\eta)\,\omega_{32}(\eta)\,d\eta. \tag{32}$$

Дифференцируя (31) и (32) по x и y и подставляя их в условие $\left.\left(\frac{\partial u_{32}}{\partial x} - \frac{\partial u_{32}}{\partial y}\right)\right|_{y=x} = \left.\left(\frac{\partial u_{31}}{\partial x} - \frac{\partial u_{31}}{\partial y}\right)\right|_{y=x}$, получим:

$$\tau_2'(0) - \nu_2(0) + \int\limits_{0}^{x}\omega_{32}(\eta)\,d\eta = -\tau_3'(0) + \nu_3(0) + \int\limits_{0}^{x}\omega_{31}(\eta)\,d\eta.$$

Дифференцируя это уравнение и в полученном равенстве заменяя x на y, находим:

$$\omega_{32}(y) = \omega_{31}(y) = -\sqrt{2}\psi_4'(y+1), \ -\frac{1}{2} \le y \le 0.$$

Теперь учитывая условие $u_{32}(x,x)=u_{31}(x,x)$, имеем:

$$\frac{\tau_2(2x)+\tau_2(0)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\nu_2(t)\,dt-\int\limits_0^{x}(x-\eta)\,\omega_{32}(\eta)\,d\eta=\frac{\tau_3(2x)+\tau_3(0)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{2x}\nu_3(t)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x}d\eta\int\limits_{\eta}^{2x-\eta}\omega_{31}(\xi)\,d\xi.$$

Дифференцируя это равенство и в полученном уравнении заменяя $2x$ на x, получим:

$$\nu_2(x)=-\tau_2'(x)+\alpha_2(x),\ -1\le x\le 0, \tag{33}$$

где $\alpha_2(x)$ – известная функция.

Теперь переходим в область D_{42}. Запишем решение уравнения (19) ($i=4$; $k=2$), удовлетворяющее условиям (9), (10):

$$u_{42}(x,y)=\frac{\tau_2(x+y)+\tau_2(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu_2(t)\,dt-\int\limits_0^{y}(y-\eta)\,\omega_{42}(\eta)\,d\eta. \tag{34}$$

Дифференцируя (34) по x и y и подставляя их в (6), получим

$$\tau_2'(-1)-\nu_2(-1)+\int\limits_0^{x+1}\omega_{42}(\eta)\,d\eta=\sqrt{2}\psi_6(x),\ -1\le x\le -\frac{1}{2}.$$

Дифференцируя это равенство и в полученном уравнении заменяя $x+1$ на y, находим:

$$\omega_{42}(y)=\sqrt{2}\psi_6'(y-1),\ 0\le y\le \frac{1}{2}. \tag{35}$$

Подставляя (33) в (34), после некоторых упрощений получим

$$u_{42}(x,y)=\tau_2(x-y)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\alpha_2(t)\,dt-\int\limits_0^{y}(y-\eta)\,\omega_{42}(\eta)\,d\eta \tag{36}$$

Теперь переходим в область D_{41}. Запишем решение уравнения (19) ($i=4$; $k=1$), удовлетворяющее условиям (11), (12):

$$u_{41}(x,y)=\frac{\tau_4(y+x)+\tau_4(y-x)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x}\nu_4(t)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x}d\eta\int\limits_{y-x+\eta}^{y+x-\eta}\omega_{41}(\xi)\,d\xi \tag{37}$$

Дифференцируя (36) и (37) по x и y и подставляя их в условие $\left.\left(\frac{\partial u_{41}}{\partial x}+\frac{\partial u_{41}}{\partial y}\right)\right|_{y=-x}=$ $\left.\left(\frac{\partial u_{42}}{\partial x}+\frac{\partial u_{42}}{\partial y}\right)\right|_{y=-x}$, получим:

$$\tau_4'(0)+\nu_4(0)+\int\limits_0^{x}\omega_{41}(-\eta)\,d\eta=\tau_2'(0)+\nu_2(0)-\int\limits_0^{-x}\omega_{42}(\eta)\,d\eta,\ -\frac{1}{2}\le x\le 0.$$

Дифференцируя это равенство и в полученном уравнении заменяя $-x$ на y и учитывая (35), находим

$$\omega_{41}(y) = \omega_{42}(y) = \sqrt{2}\psi_6'(y-1), \; 0 \leq y \leq \frac{1}{2}. \tag{38}$$

Подставляя (37) в (6), имеем

$$-\tau_4'(1) + \nu_4(1) + \int\limits_0^x \omega_{41}(1+\eta)\,d\eta = \sqrt{2}\psi_6(x), \; -\frac{1}{2} \leq x \leq 0.$$

Дифференцируя это равенство и в полученном уравнении заменяя $1+x$ на y, находим:

$$\omega_{41}(y) = \sqrt{2}\psi_6'(y-1), \; \frac{1}{2} \leq y \leq 1.$$

Из последнего равенства и (38) видно, что

$$\omega_{41}(y) = \sqrt{2}\psi_6'(y-1), \; 0 \leq y \leq 1. \tag{39}$$

Теперь подставляя (37) в (4) и дифференцируя полученное равенство, затем в полученном уравнении заменяя $2x+1$ на y, получим:

$$\tau_4'(y) + \nu_4(y) = \alpha_3(y), \; 0 \leq y \leq 1, \tag{40}$$

где $\alpha_3(y$ –известная функция.

Затем учитывая условие $u_{41}(x,-x) = u_{42}(x,-x)$, дифференцируя полученное уравнение и заменяя $-2x$ на y, получим:

$$\tau_4'(y) - \nu_4(y) = -2\tau_2'(-y) + \alpha_4(y), \; 0 \leq y \leq 1, \tag{41}$$

где $\alpha_4(y)$ – известная функция.

Из (40) и (41) находим функции $\tau_4'(y)$ и $\nu_4(y)$:

$$\tau_4'(y) = -\tau_2'(-y) + \frac{1}{2}[\alpha_3(y) + \alpha_4(y)], \; 0 \leq y \leq 1, \tag{42}$$

$$\nu_4(y) = \tau_2'(-y) + \frac{1}{2}[\alpha_3(y) - \alpha_4(y)], \; 0 \leq y \leq 1. \tag{43}$$

Интегрируя (42) от 1 до y, находим $\tau_4(y)$:

$$\tau_4(y) = \tau_2(-y) + \frac{1}{2}\int\limits_1^y [\alpha_3(t) + \alpha_4(t)]\,dt + \psi_2(0) - \tau_2(-1), \; 0 \leq y \leq 1.$$

Теперь переходим в область D_1. В уравнения (17) и (19) $(i=4;\, k=1)$ переходя к пределу при $x \to 0$, получим соотношения: $\mu_4(y) - \tau_4'(y) = \omega_1(y), \mu_4(y) - \tau_4''(y) = \omega_{41}(y)$.

Исключая из этих соотношений функцию $\mu_4(y)$, получим: $\omega_1(y) = \tau_4''(y) - \tau_4'(y) + \omega_{41}(y)$.

Дифференцируя (42), имеем: $\tau_4''(y) = \tau_2''(-y) + \frac{1}{2}[\alpha'_3(y) + \alpha'_4(y)]$.

Тогда учитывая последнее равенство и (42), функцию $\omega_1(y)$ можно записать в виде:

$$\omega_1(y) = \tau_2''(-y) + \tau_2'(-y) + \gamma_1(y), \tag{44}$$

где $\gamma_1(y)$ – известная функция.

Далее, запишем решение уравнения (17), удовлетворяющее условиям (2), (7), (11):

$$u_1(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_0^y \tau_4(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta - \int_0^y \varphi_1(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta + \right. \tag{45}$$

$$\left. + \int_0^1 \tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi - \int_0^y \omega_1(\eta)d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)d\xi\right].$$

Дифференцируя (45) по x и в полученном равенстве переходя к пределу при $x\to 0$, в силу (42) и (43) учитывая равенство $\tau_2'(-y) = \tau_1'(0) - \int\limits_0^y \tau''_2(-\eta)d\eta$, получим уравнение типа Абеля относительно $\tau_2''(-y)$. Применяя в это уравнение обращение Абеля, после некоторых вычислений получим уравнение

$$\tau_2''(-y) + \int_0^y K(y,\eta)\tau''_2(-\eta)d\eta = g(y), \tag{46}$$

где $K(y,\eta)$, $g(y)$ – известные функции.

Уравнение (46) является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода, ядро $K(y,\eta)$ имеет слабую особенность, а правая часть $g(y)$ непрерывна в промежутке $0<y<1$. Решая уравнение (46) в классе непрерывных функций в промежутке $0<y<1$, находим функцию $\tau_2''(-y)$, а следовательно и функции $\tau_2'(-y)$, $\tau_2(-y)$, $\tau_4(y)$, $\nu_4(y)$, $\omega_1(y)$, $u_{41}(x,y)$, $u_{42}(x,y)$ и $u_1(x,y)$.

Таким образом, **Задача 1** решена полностью.

Заключение

В работе [1] рассмотрен ряд краевых задач для более общих уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в области с одной характеристической линией изменения типа. В работе [2] рассмотрены краевые задачи для одного класса параболо-гиперболических уравнений третьего порядка в вогнутой шестиугольной области.

Список литературы

[1] Джураев Т. Д., Мамажонов М., “О корректной постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа”, *Дифференциальные уравнения*, **19**:1 (1983), 37–50.

[2] Мамажонов М., Шерматова Х. М., Мукадасов Х., “Постановка и метод решения некоторых краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2014, № 1(8), 7–13.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 10.03.2016