Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 1(12). C. 26-31. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-12-1-26-31

УДК 517.956

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Р. Т. Зуннунов[1], А. А Эргашев[2]

[1] Институт сейсмостойкости сооружений АН РУз, 100125, Узбекистан, г. Ташкент, Академгородок, ул. Дурмонйули, 31

[2] Кокандский государственный педагогический институт им. Мукимий, 113000, Узбекистан, г. Коканд, ул. Амира Темура, 37

E-mail: zunnunov@mail.ru

В этой работе в смешанной области, эллиптическая часть которой вертикальная полуполоса, исследована нелокальная задача, в которых нелокальные условия поточечно связывают значения дробной производной искомой функции в точках одной граничной характеристики.

Ключевые слова: задача со смещением, уравнения смешанного типа второго рода, единственность и существование решения, сингулярные интегральные уравнения, неограниченная область

MSC 35M10

THE PROBLEM WITH SHIFT FOR AN EQUATION OF MIXED TYPE OF THE SECOND KIND IN AN UNBOUNDED DOMAIN

R. T. Zunnunov[1], A. A. Ergashev[2]

[1] Institute of Earthquake Engineering, Academy of Sciences of Uzbekistan, 100125, Uzbekistan, Tashkent, Akademgorodok, Durmonyuli str., 31

[2] Kokand State Pedagogical Institute. Muqimiy, 113000, Uzbekistan, Kokand, st. Amir Temur, 37

E-mail: zunnunov@mail.ru

In this paper, in the mixed area, which is part of the elliptical vertical half-strip, non-local task, in which the nonlocal conditions associated pointwise values of the fractional derivative of the unknown function at the points of a boundary characteristics.

Key words: the problem with displacement, mixed-type equation of the second kind, uniqueness and existence of solutions, singular integral equations, unbounded domain

Введение

После публикации известных работ И.Л. Кароля [1],[2], начиная 1953 года появился интерес к изучению краевых задач для уравнений смешанного типа второго рода. В работах М.С. Салахитдинова, С.С. Исамухамедова [3], М.М. Смирнова [4], Ю.М. Крикунова [5], Ж. Орамова [6] и других рассмотрены аналоги задачи Трикоми для уравнений эллиптико-гиперболического типа второго рода в ограниченных областях. В работе Г.А. Ивашкиной [8] рассмотрены задачи со смещением на характеристиках разных семейств, для уравнения для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода в ограниченной области.

В данной работе рассмотрена задача со смещением на характеристиках одного семейства для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода в неограниченной области.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода:

$$u_{xx}+signy|y|^m u_{yy}=0,0<m<1, \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega=\Omega_1\cup AB\cup\Omega_2$. Здесь $\Omega_1=\{(x,y):0<x<1,y>0\}$, $AB=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$, а Ω_2 – конечная область полуплоскости $y<0$, ограниченная отрезком $\overline{AB}$ и двумя характеристиками:

$$AC: x-[2/(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2}=0,$$

$$BC: \eta=x+[2/\,(2-m)]\,(-y)^{(2-m)/2}=1.$$

Уравнение (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $\upsilon(\xi,0)>0$ (<0). Введем обозначения: $\beta=\dfrac{m}{2\,(m-2)}$, $k=const>1$, $a=2/\,(1+k)$,

$$\theta_0(x_0)=\left(\frac{x_0}{2},-\left[\frac{2-m}{2}\cdot\frac{x_0}{2}\right]^{\frac{2}{2-m}}\right),\theta_{0k}(x_0)=\left(\frac{x_0}{k+1},-\left[\frac{2-m}{2}\cdot\frac{x_0}{k+1}\right]^{\frac{2}{2-m}}\right).$$

Здесь $\theta_0(x_0)$ и $\theta_{0k}(x_0)$ являются точками пересечения характеристики AC уравнения (1) с линиями $l_i: x+\dfrac{2i}{2-m}(-y)^{\dfrac{2}{2-m}}=x_0$ (при $i=1,2$).

Рассмотрим уравнение (1) в области Ω.

Задача T^∞. *Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:*

1) $u(x,y)\in C\left(\bar\Omega\right)\cap C^1\left(\Omega\right)\cap C^2\left(\Omega_1\cup\Omega_2\right)$, причем $u_y(x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше чем $1-2\beta$, при $x\to 1$;

2) $u(x,y)$ является регулярным в Ω_1 и обобщенным из класса R_2 в Ω_2 решением уравнения (1) [2];

3) $u(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ \ u(1,y)=\varphi_2(y),\ \ 0\le y<+\infty, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to+\infty}u(x,y)=0, равномерно\ по x\in[0,1], \tag{3}$$

$$D_{0x}^{1-\beta}u\left[\theta_0\left(x\right)\right]+\omega\left(x\right)D_{0x}^{1-\beta}u\left[\theta_{0k}\left(x\right)\right]=\delta(x),\ 0<x<1, \tag{4}$$

$$u(x,+0)=u\left(x,-0\right),u_y\left(x,+0\right)=-u_y\left(x,-0\right), \tag{5}$$

где $\varphi_i(y)$ $(i=1,2)$, $\omega(x)$, $\delta(x)$*-заданные функции, причем* $\varphi_i(y)\in C[0,+\infty)$*, и при достаточно больших* y *удовлетворяет неравенству:* $|\varphi\left(y\right)|\leq M_1y^{-1-m/2}$*;* $\omega(x)$, $\delta(x)\in C\left[0,1\right]$*;* $\max\limits_{[0,1]}|\omega\left(x\right)|=M$, $0<M<a^{2\beta-1}$.

В силу обратимости оператора D_{sx}^{δ} из задачи $\mathbf{T}^{\infty}$ в частном случае при $\omega\left(x\right)\equiv 0$ следует задача Трикоми для уравнения (1) в области Ω.

Пусть $u\left(x,y\right)$ – решение задачи T^{∞}. Тогда оно в области Ω_2 представимо в виде [2]:

$$\begin{gathered}u\left(x,y\right)=\int\limits_0^1 H\left\{\left[x-\left(1-2\beta\right)\left(-y\right)^{1/(1-2\beta)}\right]t\right\}\left[x+\left(1-2\beta\right)\left(-y\right)^{1/(1-2\beta)}-\right.\\ \left.-xt+\left(1-2\beta\right)\left(-y\right)^{1/(1-2\beta)}t\right]^{-\beta}\left[x-\left(1-2\beta\right)\left(-y\right)^{1/(1-2\beta)}\right]^{1-\beta}\left(1-t\right)^{-\beta}dt+\\ +\frac{\left[2\left(1-2\beta\right)\right]^{1-2\beta}}{2\cos\pi\beta}\int\limits_0^1 H\left[x-\left(1-2\beta\right)\left(-y\right)^{1/(1-2\beta)}\left(2t-1\right)\right]\left(-y\right)t^{-\beta}\left(1-t\right)^{-\beta}dt-\\ -\frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)}{\Gamma^2\left(1-\beta\right)}\int\limits_0^1 \nu\left[x-\left(1-2\beta\right)\left(-y\right)^{1/(1-2\beta)}\left(2t-1\right)\right]\left(-y\right)t^{-\beta}\left(1-t\right)^{-\beta}dt\end{gathered} \tag{6}$$

где $\nu\left(x\right)=u_y\left(x,-0\right)$, $u\left(x,0\right)=\tau\left(x\right)=\Gamma\left(1-2\beta\right)D_{0x}^{2\beta-1}H\left(x\right)$.

Из (6) имеем:

$$u[\theta_0\left(x\right)]=\frac{\Gamma\left(1-\beta\right)}{2\cos\pi\beta}D_{0x}^{\beta-1}H\left(x\right)x^{-\beta}-\frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)}{\Gamma\left(1-\beta\right)\left[2\left(1-2\beta\right)\right]^{1-2\beta}}D_{0x}^{\beta-1}\nu\left(x\right)x^{-\beta} \tag{7}$$

$$u[\theta_{0k}\left(x\right)]=\frac{a^{1-\beta}\Gamma\left(1-\beta\right)}{2\cos\pi\beta}D_{0x}^{\beta-1}H\left(ax\right)\left(ax\right)^{-\beta}-\frac{a^{1-\beta}\Gamma\left(2-2\beta\right)}{\Gamma\left(1-\beta\right)\left[2\left(1-2\beta\right)\right]^{1-2\beta}}D_{0x}^{\beta-1}\nu\left(ax\right)\left(ax\right)^{-\beta}.$$

Подставляя (7) в (4), получим функциональное уравнение вида:

$$\Phi(x)+a^{1-2\beta}\omega(x)\Phi(ax)=\delta_1(x),\ 0<x<1, \tag{8}$$

где

$$\Phi(x)=\gamma_1H\left(x\right)-\gamma_2\nu(x), \tag{9}$$

$$\Phi(ax)=\gamma_1H\left(ax\right)-\gamma_2\nu(ax), \tag{10}$$

$$\delta_1\left(x\right)=x^{\beta}\delta\left(x\right),\gamma_1=\frac{\Gamma\left(1-\beta\right)}{2\cos\pi\beta},\gamma_2=\frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)}{\left[2\left(1-2\beta\right)\right]^{1-2\beta}\Gamma\left(1-\beta\right)},$$

Функцию $\Phi(x)$ будем искать в классе функций, ограниченных в точке $x=0$. Применив метод итераций [8] к решению функционального уравнения (8), для n-ой итерации имеем:

$$\Phi(x)=(-a^{1-2\beta})^nA_n(x)\Phi(a^nx)+\sum_{j=0}^{n-1}(-a^{1-2\beta})^jA_j(x)\delta_1(a^jx), \tag{11}$$

где $A_n(x) = \omega(x)\,\omega(ax)...\omega(a^{n-1}x),\ A_0(x) = 1.$

Пусть $\max\limits_{[0,1]} |\omega(x)| = M_0$ и $0 < M_0 < a^{2\beta-1}$. Тогда справедливо неравенство:

$$|A_n(x)| \le M_0^n. \tag{12}$$

Переходя в (11) к пределу, при $n \to \infty$ и учитывая $0 < a < 1$, неравенство (12) и ограниченность искомой функции $\Phi(x)$, получим:

$$\Phi(x) = F_1(x),\ \ 0 \le x \le 1, \tag{13}$$

где

$$F_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-a^{1-2\beta}\right)^j A_j(x)\delta_1(a^j x). \tag{14}$$

В силу $0 < a < 1$, (12) и условия, наложенные на $\delta_1(x)$, ряд в правой части равенства (14) сходится равномерно и $F_1(x) \in C[0,1]$, $F_1(0) = 0$.

Учитывая (9), из (13), получим функциональное соотношение, между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB, принесенное из области Ω_2:

$$\nu(x) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} H(x) - \frac{1}{\gamma_2} F_1(x), 0 < x < 1. \tag{15}$$

Теорема. *Задача* $\mathbf{T}^{\infty}$ *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ решение однородной задачи $\mathbf{T}^{\infty}$. При этом имеем $F_1(x) \equiv 0$. Поэтому соотношение (15) принимает вид

$$\nu(x) = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} H(x), 0 < x < 1, \tag{16}$$

Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Предположим противное. Тогда существует область $\Omega_{1\rho} = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ 0 < y < \rho\}$, в которой $u(x,y) 0$. Следовательно, $\sup\limits_{\overline{\Omega}_{1\rho}} |u(x,y)| > 0$ и это значение достигается в некоторой точке $(\xi,\eta) \in \overline{\Omega}_{1\rho}$.

Введем обозначение: $\partial\Omega_{1\rho} = AB \cup BD \cup DP \cup PA$ где

$$AB = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ y = 0\}, BD = \{(x,y):\ x = 1,\ 0 < y < \rho\},$$

$$DP = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ y = \rho\}, PA = \{(x,y):\ x = 0,\ 0 < y < \rho\}.$$

В силу принципа экстремума для эллиптических уравнений [9] $(\xi,\eta) \notin \Omega_{1\rho}$. В силу условия (2) и $\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(y) \equiv 0$ следует, что $(\xi,\eta) \notin \overline{BD} \cup \overline{PA}$. Тогда $(\xi,\eta) \in AB \cup \overline{DP}$. Пусть $(\xi,\eta) \in AB$, т.е. $\sup\limits_{\overline{\Omega}_{1\rho}} |u(x,y)| = \sup\limits_{\overline{AB}} |u(x,y)| = |u(\xi,0)| > 0, 0 < \xi < 1.$

Тогда, если $u(\xi,0) > 0$ (< 0), то есть $(\xi,0)$ является точкой положительного максимума (отрицательного минимума) функции $u(x,y)$. Рассуждая аналогично, как и в работах [4],[7] можно доказать, что $u_y(\xi,0) > 0$ (< 0). С другой стороны, в силу принципа Заремба-Жиро [9], $u_y(\xi,0) < 0$ (> 0). Из полученного противоречия следует $(\xi,\eta) \notin AB$.

Следовательно, $(\xi,\eta) \in \overline{DP}$, т. е. $\sup\limits_{\overline{\Omega}_{1\rho}} |u(x,y)| = \sup\limits_{0 \le x \le 1} |u(x,\rho)| > 0.$

Взяв произвольное число $\rho_1 > \rho$, таким же методом получим:

$$\sup_{\overline{\Omega}_{1\rho_1}} |u(x,y)| = \sup_{0\le x\le 1} |u(x,\rho_1)| > 0.$$

Так как $\Omega_{1\rho} \subset \Omega_{1\rho_1}$, то $\sup\limits_{\overline{\Omega}_{1\rho_1}} |u(x,y)| \ge \sup\limits_{\overline{\Omega}_{1\rho}} |u(x,y)| > 0$, т.е. $\sup\limits_{0\le x\le 1} |u(x,\rho_1)| \ge \sup\limits_{0\le x\le 1} |u(x,\rho)| > 0$. Отсюда следует $\lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) \ne 0$, что противоречит условию (3). Следовательно, $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \overline{\Omega}_1$. Так как $u(x,0) = \tau(x) \equiv 0$, то из (16) следует, что $\nu(x) \equiv 0$. Тогда, согласно формуле (6), $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_2$. Следовательно $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \overline{\Omega}$. Теорема доказана.

Существование решения задачи $\mathbf{T}^\infty$ докажем методом интегральных уравнений.

Решая задачу N в области Ω_1 методом функций Грина получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на AB из эллиптической Ω_1 части смешанной области Ω которая имеет следующий вид:

$$\tau(x) = -\int_0^1 \nu(t)\,G(x,t)dt + F_2(x), \tag{17}$$

$$G(x,t) = k_1\Bigg[|x-t|^{-2\beta} - (x+t)^{-2\beta} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(2n-x+t)^{-2\beta} - (2n-x-t)^{-2\beta} + (2n+x-t)^{-2\beta} - (2n+x+t)^{-2\beta}\right]\Bigg],$$

$$F_2(x) = \int_0^\infty \eta^m \varphi_1(\eta)\,G_\xi(0,\eta;x,0)d\eta - \int_0^\infty \eta^m \varphi_2(\eta)\,G_\xi(1,\eta;x,0)d\eta.$$

Учитывая условия склеивания (5), исключая функцию $\tau(x)$ в (15) и (17) получим сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\nu(x)$ в виде:

$$\nu(x) + \gamma_3\int_0^1 \nu(t)K(x,t)dt = F_3(x), \tag{18}$$

$$K(x,t) = \left(\frac{x}{t}\right)^{2\beta}\Bigg[\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t}{2n-t}\right)^{2\beta}\left(\frac{1}{2n-t+x} + \frac{1}{2n-t-x}\right) -$$

$$-\left(\frac{t}{2n+t}\right)^{2\beta}\left(\frac{1}{2n+t-x} + \frac{1}{2n+t+x}\right)\Bigg],$$

$$F_3(x) = \frac{1}{\gamma_2(1+\sin\pi\beta)}\left\{\gamma_1 D_{0x}^{1-2\beta}[F_2(x)] - F_1(x)\right\},$$

$$\gamma_3 = \cos\pi\beta / [\pi(1+\sin\pi\beta)].$$

Уравнение (18) сводится к сингулярному интегральному уравнению с ядром типа Коши. Затем применяя к нему известный метод регуляризации Карлемана-Векуа [10], приходим к эквивалентному в смысле разрешимости уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи. □

Заключение

Результаты работы получены с использованием метода принципа экстремума, свойств интегро-дифференциальных операторов, метода фукций Грина и методов теории интегральных уравнений.

Рассмотрен аналог задачи со смещением с условиями А.М. Нахушева для уравнения (1) в смешанной области, когда нелокальное условие задается на характеристике одного семейства. Эллиптическая часть рассматриваемой области является вертикальной полуполосой. Построена функции Грина задачи N для этой области. Доказана однозначная разрешимость поставленных задач.

Список литературы

[1] Кароль И. Л., “Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода”, *Докл. АН СССР*, **88**:2 (1953), 197–200.

[2] Кароль И. Л., *Автореферат кандидатской диссертации. Л.,ЛГУ,1952.*.

[3] Салахитдинов М. С., Исамухамедов С. С., “Краевые задачи для одного уравнения смешанного типа”, *Изв. АН УзССР. Сер. Физ. Мат. науки*, 1968, № 5, 73–74.

[4] Смирнов М. М., *Уравнения смешанного типа*, Высшая школа, М., 1985, 304 с.

[5] Крикунов Ю. М., *Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа*, Изд-во Казанского университета, Казань, 1986, 148 с.

[6] Орамов Ж., “О некоторых задачах типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения”, *Дифференциальные уравнения*, **19**:1 (1983), 94–101.

[7] Ивашкина Г. А., “Краевая задача со смещением для уравнения второго рода”, *Дифференциальные уравнения*, **17**:2 (1978), 281–290.

[8] Зуннунов Р. Т., Мамасолиева М. А., “Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа в неограниченной области, эллиптическая часть которой прямоугольник”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2014, № 1(8), 49–59.

[9] Бицадзе А. В., *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*, Наука, М., 1966, 204 с.

[10] Мусхелишвили Н. И., *Сингулярные интегральные уравнения*, ГИФМЛ, М., 1962, 600 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 01.03.2016