Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 1(12). C. 15-25. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-12-1-15-25

УДК 512.24

НАХОЖДЕНИЕ ИНДЕКСА ПОДГРУППЫ И ПРОБЛЕМА ВХОЖДЕНИЯ

А. П. Горюшкин

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: as2021@mail.ru

Для отдельных классов групп устанавливаются связи между двумя алгоритмическими проблемами: проблемой вычисления индекса подгруппы и проблемой вхождения.

Ключевые слова: группа, подгруппа, индекс подгруппы, алгоритмическая проблема, свободное произведение, прямое произведение

MSC 18A32

INDEX OF A SUBGROUP FINDING AND OCCURENCE PROBLEM

A. P. Goryushkin

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: as2021@mail.ru

For separate classes of groups some relationships are revealed between two algorithmic prob-lems: problem calculation of index of a subgroup and occurrence problem.

Key words: group, subgroup, index of a subgroup, algorithmic problem, free product, direct product, occur-rence problem.

Введение

Проблема индекса для конечно определенной группы G состоит в вопросе о существовании алгоритма, позволяющего по любому конечному множеству элементов $h_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ группы G выяснить, конечный или бесконечный индекс в G имеет подгруппа $H = \text{гр}(h_1, h_2, \cdots, h_m)$, порожденная этим множеством.

В конечно порожденной группе содержится лишь конечное число подгрупп для каждого данного конечного индекса. Поэтому если в группе G разрешимы проблема вхождения и проблема индекса, то получив информацию, что индекс подгруппы H в G конечен, простым перебором подгрупп конечного индекса в конечное число шагов можно этот индекс вычислить точно (детальное построение см., например, в работе [1], глава 1, § 8, стр. 42–44).

Частным случаем вычисления индекса является определение индекса единичной подгруппы группы G, т. е. нахождение порядка группы G. Свойство «быть конечной» для группы является марковским свойством, и поэтому в классе всех конечно определенных не существует алгоритма для узнавания, конечна или нет данная группа (впервые показано в работе С. Адяна [2]).

Примеры групп с разрешимой проблемой индекса

Для конкретной конечно определенной группы G вычисление ее порядка не является массовой задачей. Однако, если G – бесконечная, то в ней есть подгруппы бесконечного и конечного индексов. Такие индексы имеют, например, тривиальные подгруппы, но, возможно, что в G найдутся и другие подгруппы, как конечного, так и бесконечного индекса.

Если G – бесконечная простая конечно определенная группа, то из разрешимости в G проблемы вхождения следует разрешимость проблемы индекса, так как в такой группе всего одна подгруппа конечного индекса – сама G.

Однако обратная ситуация с простыми группами существенно сложнее. Каждая счетная группа изоморфно вложима в два-порожденную простую группу (впервые показано в работе [3]). В частности, конечно определенная группа S с неразрешимой проблемой равенства (а, следовательно, и с неразрешимой проблемой вхождения) так же изоморфно вкладывается в некоторую простую два-порожденную группу G. В работе Кузнецова [4] установлено, что в каждой рекурсивно определенной простой группе разрешима проблема равенства. Это значит, что два-порожденная простая группа, содержащая такую S, не только не является конечно определенной, она даже не может быть рекурсивно представлена.

Проблема вхождения фактически обсуждается в курсе линейной алгебры. Критерий совместности системы линейных уравнений является решением проблемы вхождения в конечно мерных векторных пространствах. Алгоритм, опирающийся на этот критерий, состоит в вычислении размерности двух вспомогательных подпространств. Эта размерность находится с помощью последовательного изменения порождающих множеств подпространств.

Для нахождения индекса подгруппы H в группе G точно так же можно изменять порождающее множество для H. Порождающее множество подгруппы видоизменяется с помощью преобразований, аналогичных элементарным преобразованиям порождающего множества подпространства векторного пространства. Преобразования в группе следующие:

– замена элемента x на x^{-1};

– замена элемента x на элемент xy , где $x \neq y$;

– удаление единичного элемента.

Например, если H – подгруппа бесконечной циклической группы $F_1 =< a >$, и $H = \text{гр}(a^{m_1}, a^{m_2}, \cdots, a^{m_k})$, где $m_1, m_2, \cdots, m_k \in Z$, то с помощью элементарных преобразований можно найти единственный порождающий подгруппы H, равный a^s, где $s = \text{НОД}(m_1, m_2, \cdots, m_k)$. Индекс равен числу s. Таким образом, задача нахождения индекса подгруппы бесконечной циклической группы сводится к отысканию наибольшего общего делителя конечного множества целых чисел. Иначе говоря, проблема индекса для бесконечной циклической группы алгоритмически разрешима.

Бесконечная циклическая группа является частным случаем свободной группы. Группа $< a >= F_1$ – это свободная группа ранга 1. Задача вычисления индекса произвольной подгруппы свободной группы F_r любого ранга r так же имеет алгоритмическое решение.

Пусть $H = \text{гр}(h_1, h_2, \cdots, h_m)$ – конечно порожденная подгруппа свободной группы F_n. С помощью преобразований порождающего множества в конечное число шагов можно получить свободные порождающие для подгруппы H, и таким образом найти ранг H. Такой способ получения свободных порождающих подгруппы свободной принято называть *методом Я. Нильсена* (детали доказательства см. например, [5], глава 1, п. 2, стр. 16–21).

О. Шрейер, оперируя не только порождающими элементами подгруппы, но и представителями смежных классов, установил связь между индексом подгруппы свободной группы, рангом этой подгруппы и рангом исходной свободной группы (см. например, [5], стр. глава 1, п. 3, стр. 33–34). Если подгруппа H ранга k имеет конечный индекс в свободной нециклической группе ранга r имеет, то этот индекс равен

$$\frac{k-1}{r-1}.$$

С помощью формулы Шрейера проблема индекса подгруппы свободной группы сводится к вычислению ранга подгруппы, который можно найти с помощью метода Нильсена (подробнее см. в работе Карраса и Солитэра [6]). Таким образом, проблема индекса в свободных группах *алгоритмически разрешима*.

Примеры групп с неразрешимой проблемой индекса

Покажем, что не в каждой конечно определенной группе проблема индекса алгоритмически разрешима.

Теорема 1. *В прямом произведении двух свободных нециклических групп одинакового ранга проблема конечности индекса алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. Пусть группа G является прямым произведением двух свободных групп $A =< a_1, a_2, \cdots, a_m >$ и $B =< b_1, b_2, \cdots, b_m >$, где $m \geq 2$.

Рассмотрим произвольную конечно определенную группу R, заданную представлением

$$R =< r_1, r_2, \cdots, r_k; w_1(r_i), \cdots, w_n(r_i) > .$$

Пусть число s удовлетворяет неравенству

$$s \geq \frac{k-1}{m-1}.$$

В группе A есть подгруппы любого конечного индекса; выберем в A подгруппу P индекса s. По формуле Шрейера ранг подгруппы P равен $s(m-1)+1$, причем

$$s(m-1)+1 \geq k.$$

Если ранг подгруппы P окажется строго больше k, то представление группы R пополним еще $s-k$ порождающими элементами и приравняем эти элементы к единице. Без ограничения общности можно считать, что это уже сделано, т. е. $s=k$. Пусть P элементы $p_1, p_2, \cdots, p_k$ свободно порождают подгруппу P:

$$P =< p_1, p_2, \cdots, p_k > .$$

В группе B выберем подгруппу Q ранга k, индекса s в B и со свободными порождающими элементами $q_1, q_2, \cdots, q_k$:

$$Q =< q_1, q_2, \cdots, q_k > .$$

Подгруппа группы G, порожденная подгруппами P и Q, изоморфна прямому произведению $P \times Q$ и имеет в группе G конечный индекс.

Рассмотрим теперь нормальное замыкание элементов $w_1(p_i), \cdots, w_n(p_i)$ в группе P:

$$H_1 = \text{гр}(w_1(p_i), \cdots, w_n(p_i), p_1q_1, \cdots, p_kq_k).$$

Элементы r_i, q_i лежат в различных прямых сомножителях группы G, поэтому они перестановочны:

$$r_iq_i = q_ir_i.$$

Это значит, что для любого слова φ выполняется равенство

$$\varphi(p_iq_i) = \varphi(p_i)\varphi(q_i)$$

и поэтому для любого $w_j(p_i)$ имеем равенство:

$$\varphi^{-1}(p_iq_i)w_j(p_i)\varphi(p_iq_i) = \varphi^{-1}(q_i)\varphi^{-1}(p_i)w_j(p_i)\varphi(p_i)\varphi(q_i) = \varphi^{-1}(p_i)w_j(p_i)\varphi(p_i).$$

Отсюда следует, что подгруппа N_1 содержится в подгруппе H_1:

$$N_1 \subset H_1 \cap P.$$

С другой стороны, если $\varphi(w_n(p_i), p_iq_i)$ принадлежит P, то сумма степеней в слове φ для каждого q_i равна нулю, а это означает, что $\varphi(w_j(p_i), p_iq_i) \in N_1$. Таким образом,

$$N_1 = H_1 \cap P.$$

Проделаем аналогичные построения во втором прямом множителе. Пусть N_2 – нормальное замыкание элементов $w_1(q_i), \cdots, w_n(q_i)$ в группе Q:

$$N_2 =< w_1(q_i), \cdots, w_n(q_i) >$$

и

$$H_2 = \text{гр}(w_1(q_i), \cdots, w_n(q_i), p_1q_1, \cdots, p_kq_k).$$

Точно так же, как и для групп H_1, N_1 и P, теперь получаем для групп H_2, N_2 и Q:

$$N_2 = H_2 \cap Q.$$

Для любого $j = 1, 2, \cdots, n$ имеем:

$$w_j(p_iq_i) = w_j(p_i)w_j(q_i),$$

и, следовательно,

$$w_j(q_i) = w_j^{-1}(p_i)w_j(p_iq_i).$$

Это означает, что $H_2 \subset H_1$; по тем же соображениям верно и обратное включение: $H_1 \subset H_2$. Группы H_1 и H_2 совпадают; обозначим их одной буквой H:

$$H = H_1 = H_2.$$

Пересечения с подгруппами P и Q,

$$H \cap P = N_1, H \cap Q = N_2.$$

Если группа R – конечна, то индексы N_1 и N_2 в подгруппах P и Q конечны, но P и Q подгруппы конечного индекса в прямых множителях, и, следовательно, индекс $[G : H]$ конечен.

Наоборот, если индекс H в группе G конечен, то конечен индекс N_1 в подгруппе P, и, следовательно, группа R – конечна.

Таким образом, проблема индекса в группе G эквивалентна проблеме конечности в классе всех конечно определенных групп, Проблема конечности неразрешима, а, значит, и проблема индекса для конечно определенной группы тоже алгоритмически неразрешима. □

Алгоритмическая неразрешимость проблемы означает, в частности, что машинного решения такой задачи не существует. Например, никакая техника никогда не сможет по единой программе всегда однозначно отвечать на вопрос, конечен или бесконечен индекс произвольно заданной конечно порожденной подгруппы в группе

$$G = F_2 \times F_2 =< a, b, c, d; aca^{-1}c^{-1}, ada^{-1}d^{-1}, bcb^{-1}c^{-1}, bdb^{-1}d^{-1} > .$$

Отметим, впрочем, что в некоторых случаях вычисление индекса подгруппы в конечно определенной группе можно все-таки выполнить с помощью техники. Например, пакет символьных вычислений Maple 18 иногда позволяет вычислить индекс подгруппы в конечно определенной группе, если этот индекс конечен и не превышает числа 128000. Однако машинные результаты, как правило, требуют дополнительной «ручной» проверки. Примеры такого рода вычислений и ручных проверок представлены в работах [7] – [10].

С. Михайловой в работе [11] показано, что для группы $F_2 \times F_2$ проблема вхождения неразрешима. Это доказательство (§ 2, теорема 1, стр. 242–244 в [11]) легко переносится и на более общий случай прямого произведения $F_r \times F_r$ двух свободных групп ранга $r \geq 2$. Таким образом, возникает бесконечная серия конечно определенных групп, для которых проблема вхождения и проблема индекса оказались эквивалентными (обе неразрешимы).

Заметим, что в свободных группах разрешимы и проблема вхождения, и проблема индекса, однако прямое произведение не сохранило ни того, ни другого.

Свободное произведение, в отличие от прямого, разрешимость проблемы вхождения сохраняет: из разрешимости проблемы вхождения в множителях A, B следует разрешимость проблемы вхождения в свободном произведении $G = A * B$ (Михайлова, [12]).

Связь проблемы индекса и проблемы вхождения для свободно разложимых групп

Методом, близким к методу Нильсена для свободных групп, Д. Молдаванский в работе [13] уточнил результат Михайловой о решении проблемы вхождения в свободном произведении.

Пусть W – некоторое множество слов из свободного произведения $G = A * B$. Расширим множество W до множества $W^{\pm 1}$, замкнутого относительно операции обращения:

$$W^{\pm 1} = \{g \mid g \in W \text{ или } g^{-1} \in W\}.$$

Начальный отрезок элемента g из W называют изолированным в W, если он не является начальным отрезком никакого другого элемента из $W^{\pm 1}$. Пусть $W_v(X)$ - множество всех элементов из W, имеющих вид vxv^{-1}, где $x \in X (X = A$ или $X = B)$. Пару (v, X) называют *типом трансформ* из $W_v(X)$. Символом $S(v, X)$ обозначим множество всех элементов из множителя X, являющихся $(l(v) + 1)$ слогом некоторого элемента g из множества $(W \setminus W_v(X))^{\pm 1}$, причем начальным отрезком элемента g является v, т. е. несократимая форма g имеет вид: $g = vsz$, где $s \in S(v, X)$.

Следуя [9], назовем множество элементов W из свободного произведения *нильсеновским множеством*, если:

– большой начальный отрезок каждого элемента из $W^{\pm 1}$ изолирован в W;

– левая половина каждого элемента четной длины из $W^{\pm 1}$ изолирована в W;

– для каждого типа (v, X) множество $S(v, X)$ не содержит элементов из подгруппы $v^{-1}\text{гр}(W_v(X))v$, а множество $S(v, X)$ состоит из представителей различных правых смежных классов группы подгруппе $v^{-1}\text{гр}(W_v(X))v$.

– левая половина каждого элемента из $W^{\pm 1}$, не являющегося трансформой, изолирована в W;

Как и для свободных групп, преобразования Нильсена множества M элементов свободного произведения G это:

– замена некоторого элемента x из M элементом x^{-1},

– замена некоторого элемента x элементом xy^{ε}(где $y \in M, y \neq x, \varepsilon = \pm 1$).

– выбрасывание единицы.

Индукцией по суммарной длине всех слов множества W устанавливается, что с помощью конечной последовательности преобразований любое конечное множество W можно превратить в нильсеновское множество, причем процедура преобразований эффективна, если в свободных множителях разрешима проблема вхождения. Свойства нильсеновского множества означают, что полученные порождающие подгруппы H являются порождающими разложения Куроша- Маклейна этой подгруппы (Молдаванский [13] и [14]).

Таким образом:

– если в группах A и B разрешима проблемы вхождения, то существует эффективная процедура перехода, переводящее любое множество элементов W группы G в нильсеновское множество W_1;

– из разрешимости проблемы вхождения в группах A и B следует разрешимость проблемы вхождения в группе G;

– если W_1 – нильсеновское множество порождающих для подгруппы H группы G, то H является свободным произведением групп, порожденных трансформами одного типа, и бесконечных циклических групп, порожденных элементами из W_1, не являющихся трансформами, причем это разложение для H является разложением Куроша-Маклейна.

Теорема 2. *Если в группах A, B разрешима проблема вхождения, то в свободном произведении $G = A * B$ разрешима проблема индекса.*

Доказательство.

Пусть W – некоторое конечное множество элементов из группы G, и H – подгруппа, порожденная множеством W. Так как существует эффективная процедура, переводящая каждое конечное множество в нильсеновское, можно считать, что уже W является нильсеновским множеством.

Пусть $v_iA_iv_i^{-1}$, $i = 1,2,\cdots,m$, и $w_jB_jw_j^{-1}$, $j = 1,2,\cdots,n$ – подгруппы, порожденные типами трансформ (v_i,A_i) и $\left(w_j,B_j\right)$ соответственно, а F – свободная группа, порожденная элементами из W, не являющимися трансформами. Тогда согласно теореме Куроша о подгруппах свободного произведения подгруппу существуют такие системы представителей двойных смежных классов $s_A(HgA)$ и $s_B(HgB)$, что

– $s_A(HA) = s_B(HB) = 1$;

– если $HgA \neq HA$, то $s_A(HgA)$ заканчивается B-слогом, и если $HgB \neq HB$, то $s_A(HgB)$ заканчивается A- слогом;

– группа H является свободным произведением;

$$H = F * \prod_{X\in\{A,B\},g\in G} * s_X\left(HgX\right)X\left[s_X\left(HgX\right)^{-1}\right]\cap H,$$

где F – свободная группа, не содержащая ни одного сопряжения из групп A,B.

В работе [1] показано, что если G – нетривиальное свободное произведение $A*B$, и H – конечно разложимая подгруппа в G, то индекс разложения $[G:(H,A)]$ по двойному модулю конечен тогда и только тогда, когда индекс $[G:H]$ конечен ([1], глава 1, § 2, стр. 15 – 17).

Рассмотрим разложение группы G по двойному модулю

$$G = Hg_1A + Hg_2A + \cdots$$

Если множество $\{g,g_2,\cdots\}$ образует полную систему представителей для разложения $G \mod (H,A)$, то в этом множестве найдется такое подмножество $\{g_{\alpha_1},\cdots,g_{\alpha_m}\}$, что для $i = 1,2,\cdots,m$

$$g_{\alpha_i} = v_i \mod (H,A).$$

Кроме того, для каждого элемента g из G, если g сравним по $\mod (H,A)$ с некоторым элементом из разности

$$Y = \{g,g_2,\cdots\} \setminus \{g_{\alpha_1},\cdots,g_{\alpha_m}\},$$

то пересечение $H \cap gAg^{-1}$ равно единичной подгруппе.

Аналогичное утверждение выполняется и для подгруппы B.

Далее рассмотрим три случая.

Случай 1. Оба свободных множителя A и B является бесконечными группами.

Пусть ранг свободной группы F в разложении для подгруппы H оказался равным r. Число r, а также числа m,n эффективно вычислимы. Обозначим

$$k = m+n+r-1.$$

При фиксированном разложении $G = A*B$ число k является инвариантом всевозможных разложений Куроша для подгруппы H. В частности, если

$$H = F_1 * \prod_{\nu} *H_{\nu},$$

– разложение Маклейна для группы H, то ранг подгруппы F_1 тоже равен r.

В работе Куна [15] установлено, что разложение Маклейна обладает следующим свойством: если подгруппа H имеет конечный индекс в свободном произведении $A*B$, то ранг свободной части F_1 для разложения H равен

$$[G:H]-[G:(H,A)]-[G:(H,B)]+1.$$

Заметим теперь, что в рассматриваемом случае из конечности индекса H в G следует, что $[G:(H,A)] = m$, а $[G:(H,B)] = n$.

Предположим, что $[G:(H,A)] > m$. Тогда множество Y не пусто, следовательно, найдется такой элемент g из G, что пересечение $H \cap gAg^{-1}$ единично.

Из того, что группа A бесконечна, следует бесконечность индекса подгруппы H в группе G.

Точно такие же рассуждения подходят и для подгруппы B.

Отметим еще, что можно считать, что $k > 0$. Действительно, если оказалось, что $k = 0$, то H является бесконечной циклической группой или подгруппой из сопряжения множителя, и, следовательно, индекс H в G бесконечен.

Рассмотрим множество $\mathfrak{R}$ подгрупп группы G индекса k в G,

$$\mathfrak{R} = K \leq G \mid [G:K] = k.$$

Множество $\mathfrak{R}$ конечно, и можно эффективно найти множества систем порождающих для подгрупп из $\mathfrak{R}$. Из разрешимости проблемы вхождения в группе G следует разрешимость проблемы вхождения произвольной конечно порожденной подгруппы P из G в множество $\mathfrak{R}$. Теперь если H имеет конечный индекс в G, то выполняется равенство

$$r = [G:H]-m-n+1,$$

т. е. H принадлежит $\mathfrak{R}$. Другими словами, подгруппа H имеет конечный индекс в G тогда и только тогда, когда H лежит $\mathfrak{R}$. Этим заканчивается рассмотрение случая 1.

Случай 2. Группа G является свободным произведением $A*B$ конечной группы A и бесконечной группы B.

Рассмотрим нормальное замыкание $\bar{B}$ свободного множителя B в группе G. Подгруппа $\bar{B}$ является свободным произведением сопряжений подгруппы с помощью элементов из A,

$$\bar{B} = \prod_{a \in A} *B^{a},$$

т. е. – это свободное произведение

$$\bar{B} = B * \prod_{a \in A \setminus \{1\}} * B^a,$$

где оба множителя – бесконечные группы.

Обозначим через R подгруппу группы G, порожденную подгруппами H и $\bar{B}$, а буквой D обозначим пересечение $\bar{B} \cap H$. Подгруппа R имеет конечный индекс в G, а так как в группе G разрешима проблема вхождения, порождающие для R можно эффективно найти. Кроме того, можно эффективно найти множество $r_1, r_2, \cdots, r_s$, являющееся полной системой представителей правых смежных классов для $R \mod \bar{B}$. Пересечения $H \cap Dr_i, i = 1, \cdots, s$ не пусты; и если выбрана система элементов $h_i, \cdots, h_s$ по одному из каждого множества, то это множество образует полную систему представителей правостороннего разложения $H \mod D$. Снова из разрешимости проблемы вхождения в группе G следует существование эффективной процедуры для нахождения множества $h_i, \cdots, h_s$.

Теперь можно найти порождающие элементы для подгруппы D. Так как индекс подгруппы $\bar{B}$ в группе G конечен, подгруппа H имеет конечный индекс в G тогда и только тогда, когда D имеет конечный индекс в $\bar{B}$. Таким образом, случай 2 сводится к случаю 1.

Случай 3. Группа G – свободное произведение неединичных конечных групп A и B.

Рассмотрим $K = [A, B]$, взаимный коммутант A и B. Так же, как в случае 2 можно найти порождающие пересечения $D = H \cap K$.

Таким образом, если ранг группы D больше единицы, свести рассматриваемую ситуацию к случаю 1. Если же ранг D равен единице, то G является бесконечной группой диэдра, в которой подгруппа H имеет конечный индекс тогда и только тогда, когда порядок Н больше двух.

□

Итак, для разрешимости проблемы индекса в свободном произведении $A * B$ достаточно разрешимости проблемы вхождения в группах A и B.

Покажем, что это достаточное условие является необходимым.

Теорема 3. *Если в нетривиальном свободном произведении $A * B$ разрешима проблема индекса, то в свободных множителях A, B разрешима проблема вхождения.*

Доказательство. Покажем, что из разрешимости проблемы индекса в группе $A * B$ следует разрешимость проблемы вхождения в группе A.

Пусть A_1 - произвольная конечно порожденная подгруппа группы A, а x – произвольный элемент из группы A. С помощью алгоритма, решающего проблему индекса в группе G, выясним, принадлежит элемент x подгруппе A_1 или нет. Возьмем b_0 – неединичный элемент из подгруппы B. Алгоритм, решающий проблему вхождения в группе A будет зависеть от того, равен порядок подгруппы В двум или нет.

Случай 1. Порядок группы B больше двух. В группе G рассмотрим подгруппу

$$H_1 = \text{гр}(A_1, B^x, A^{b_0}).$$

Покажем, что подгруппа H_1 имеет конечный индекс в группе G тогда и только тогда, когда x принадлежит A_1. Это и будет означать разрешимость проблемы вхождения для группы A.

Если x принадлежит A, то H_1 имеет конечный (равный единице) индекс в G. Предположим, что $x \notin A$; тогда H_1 разлагается в свободное произведение

$$H_1 = A_1 * B^x * A^{b_0}.$$

Пусть b – неединичный элемент из B, отличный от b_0. Тогда подгруппа, порожденная подгруппами H_1 и A_b, является их свободным произведением,

$$\text{гр}(H_1, A^b) = H_1 * A^b$$

и, следовательно, имеет бесконечный индекс в группе G. Этим заканчивается рассмотрение случая, когда порядок больше двух.

Случай 2. Порядок B равен двум. Тогда в группе G возьмем подгруппу

$$H_2 = \text{гр}(A_1, A^{xb_0}, a_0^{-b} A a_0^{b_0}),$$

где a_0 – неединичный элемент из группы A. Подгруппа H_2 содержится в нормальном замыкании множителя A в группе G; причем

$$\bar{A} = A * b_0^{-1} A b_0.$$

Таким образом, группа $\bar{A}$ попадает в условия предыдущего случая. Сейчас роль группы B исполняет группа A^{b_0}, а роль элемента b_0 – элемент $a_0^{b_0}$. Подгруппа H_2 в группе построена аналогично подгруппе H_1 в группе $A * B$. Поэтому снова элемент x принадлежит подгруппе A_1 тогда и только тогда, когда H_2 имеет конечный индекс в $\bar{A}$, и, следовательно, и конечный индекс в группе G. Теорема 3 доказана. □

Из теоремы 2 и 3 следует, что для каждой свободно разложимой группы проблема индекса разрешима тогда и только тогда, когда в этой группе разрешима проблема вхождения.

Заметим, что для эквивалентности проблемы индекса и проблемы вхождения группе вовсе не обязательно быть свободно разложимой. Очевидно, что свободное произведение с объединенной конечной нормальной подгруппой или прямое произведение свободного произведение и конечной группы тоже обладают этим свойством.

Заключение

В рассмотренных бесконечных сериях групп проблема индекса и проблема вхождения оказались равносильными. Возможно, что эта связь между двумя алгоритмическими проблемами выполняется для всех конечно определенных групп.

ВОПРОС 1. Верно ли, что в классе конечно определенных групп проблема вхождения эквивалентна проблеме индекса?

Заметим, что для разрешимости проблемы индекса в $A * B$ не потребовалась разрешимость проблемы индекса в группах A и B. Поэтому если бы разрешимость проблемы индекса в множителях оказалась необходимым условием разрешимости проблемы индекса в свободном произведении, то для любой конечно определенной группы из разрешимости проблемы индекса следовала бы разрешимость проблемы вхождения.

С другой стороны, если бы разрешимость проблемы индекса была достаточным условием разрешимости проблемы индекса в свободном произведении, то из разрешимости проблемы индекса следовала бы разрешимость проблемы вхождения.

Таким образом, вопрос, не эквивалентна ли проблема вхождения проблеме индекса, можно сформулировать в виде двух следующих вопросов.

ВОПРОС 2. Верно ли, что из разрешимости проблемы индекса в свободном произведении следует разрешимость проблемы индекса в свободных множителях?

ВОПРОС 3. Верно ли, что из разрешимости проблемы индекса в свободных множителях следует разрешимость проблемы индекса в свободном произведении?

Список литературы

[1] Горюшкин А. П., *Амальгамированные свободные произведения групп*, ДВФУ, Владивосток, 2012, 158 с.

[2] Адян С. И., “Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп”, *Докл. АН СССР*, **103**:4 (1955), 533–535.

[3] Goryushkin A. P., “Imbedding of countable groups in 2-generated simple groups”, *Mathematical Notes*, **16**:2 (1974), 725–727.

[4] Кузнецов А. В., “Алгоритмы как операции в алгебраических системах”, *УМН*, **13**:3 (1958), 240–241.

[5] Линдон Р., Шупп П., *Комбинаторная теория групп*, Мир, М., 1980, 448 с.

[6] Karrass A., Solitar D., “On finitely generated subgroups of a free group”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **22**:1 (1969), 209–213.

[7] Горюшкин А. П., “Особенности машинного исследования дискретных групп”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2013, № 1(6), 43–55.

[8] Горюшкин А. П., “Машинное решение задач дискретной математики”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2011, № 2(3), 58–68.

[9] Горюшкин А. П., “О группах с представлением $< a,b;a^n = 1,ab = b^3a^3 >$”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2010, № 1(1), 8–11.

[10] Горюшкин А. П., Горюшкин В. А., *Элементы абстрактной и компьютерной алгебры*, КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 2011, 518 с.

[11] Михайлова С. А., “Проблема вхождения для прямых произведений групп”, *Мат. сб.*, **70**:2 (1966), 241–251.

[12] Михайлова С. А., “Проблема вхождения для свободных произведений групп”, *Мат. сб.*, **117**:2 (1968), 199–210.

[13] Молдаванский Д. И., “Метод Нильсена для свободного произведения групп”, *Уч. зап. Иванов. гос. пед. ин-та*, 1969, № 61, 170–182.

[14] Молдаванский Д. И., “О проблеме сопряженности для подгрупп”, *Уч. зап. Иванов. гос. пед. ин-та*, 1972, № 106, 123–135.

[15] Kuhn H. W., “Subgroup theorems for groups presented by generators and relations”, *Ann. of Math.*, 1952, № 56, 22–46.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.02.2016