DOI: 10.18454/2079-6641-2016-13-2-73-78

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

УДК 51-8

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ «ВИТУС БЕРИНГ –2016»

Г. М. Водинчар, О. К. Жданова, А. С. Пережогин, О. В. Шереметьева, Т.П. Яковлева

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: kafmat@mail.ru

В статье приведены задачи олимпиады по математике «Витус Беринг – 2016» для старших школьников, которая проходила на базе Камчатского государственного университета в апреле 2016 года.

Ключевые слова: олимпиадные задачи по математике для школьников

TEACHING MATERIALS

MSC 97A90

SOLUTIONS OF MATHEMATICAL OLYMPIAD «VITUS BERING – 2016»

G. M. Vodinchar, O. K. Zhdanova, A. S. Perezhogin, O. V. Sheremet'eva, T. P. Yakovleva

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: kafmat@mail.ru

We consider solutions of Mathematical Olympiad «Vitus Bering – 2016» for high school students. It was held at Kamchatka State University in April 2016.

Key words: mathematical olympiad for high school students.

Введение

Настоящая заметка не содержит результатов оригинальных исследований или обзора таких результатов. Она посвящена математической олимпиаде школьников старших классов «Витус Беринг – 2016», которая проводилась Камчатским государственным университетом имени Витуса Беринга в начале апреля 2016 года и содержит задачи олимпиады и их решения. Эта вторая математическая олимпиада, проводимая на физико-математическом факультете в 2015/2016 уч. году. Задачам первой олимпиады этого года, проходившей в ноябре 2015 года, посвящена статья [1].

Предметные являются эффективным и испытанным временем средство привлечения талантливых школьников к науке и организации отбора в высшие учебные заведения.

Введение отбора абитуриентов в вузы через систему Единого государственного экзамена увеличил заинтересованность вузов к проведению своих олимпиад. Победители и призеры вузовских олимпиад получают, как правило, дополнительные баллы к баллам ЕГЭ при поступлении в соответствующий вуз.

Математическая олимпиада «Витус Беринг – 2016» проводилась в один тур и включала в себя 6 задач различной сложности для школьников 9-11 классов. На выполнение заданий участникам олимпиады было выделено 3 часа. При подготовке олимпиадных заданий организаторы использовали некоторые типовые задания из сборника [2].

Далее приводятся задания этой олимпиады и их решения.

Задания олимпиады

1) (10 баллов) Дана последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... , в которой $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ для всякого $n = 1, 2, \ldots$ Найти наибольший общий делитель чисел a_{100} и a_{99}.

2) (10 баллов) В интернет-магазине, имеющем менее 20 моделей смартфонов, число шестидюймовых смартфонов кратно числу пятидюймовых смартфонов, которых в свою очередь, в три раза меньше, чем четырехдюймовых. Если число шестидюймовых смартфонов увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем пятидюймовых. Сколько четырехдюймовых смартфонов в интернет-магазине?

3) (10 баллов) Дан многочлен $J(x) = x^2 + x + 2016$. Многочлен $H(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет только три различных действительных корня, при этом многочлен $H(J(x))$ не имеет действительных корней. Доказать, что $H(2016) > 1/64$.

4) (10 баллов) Дана функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Найти $\underbrace{f(\ldots f(f(\sqrt[3]{2016})))}_{2016}$.

5) (10 баллов) Найти все простые числа p, q такие, что $p + q = (p - q)^3$.

6) (10 баллов) Доказать, что произведение $(n+1)(n+2)..(2n-1)2n$ делится на $n!$.

7) (10 баллов) При каком a система

$$\begin{cases} y = 2 - \sqrt{a^2 - 9 + 6x - x^2} \\ -x^2 + 3x + yx + 3y + 18 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения?

Решения

1) При $n = 98$ получим $a_{100} = a_{99} + a_{98}$. Применим алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя к этому выражению. Тогда остаток от деления $r_1 = a_{100} : a_{99} = a_{98}$.

   При $n = 97$ получим $a_{99} = a_{98} + a_{97}$. Применим алгоритм Евклида и тогда остаток от деления будет равен $r_2 = a_{99} : a_{98} = a_{97}$.

   Продолжая аналогичным образом далее, при $n = 1$ получим $a_3 = a_2 + a_1$ и остаток $r_{98} = a_3 : a_2 = a_1$. А так как $a_2 = 1$ и $a_1 = 1$, то $r_{99} = 0$ и алгоритм Евклида завершается.

   Таким образом, НОД(a_1, a_2) = НОД(a_2, a_3) $= \ldots =$ НОД(a_{100}, a_{99}) $= 1$.

   Ответ. 1.

2) Пусть m_4, m_5, m_6 – число четырех-, пяти- и шестидюймовых телефонов. Из условия задачи составим следующие ограничения:

$$\begin{cases} m_4 + m_5 + m_6 < 20, \\ m_6 = k \cdot m_5, \\ m_4 = 3m_5, \\ 2m_6 = m_5 + 14. \end{cases}$$

   Воспользуемся вторым и третьим уравнениями для и преобразования первого и четвертого выражений:

$$\begin{cases} 3m_5 + m_5 + k \cdot m_5 < 20, \\ 2k \cdot m_5 = m_5 + 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4+k)m_5 < 20, \\ (2k-1)m_5 = 14 = 7 \cdot 2. \end{cases}$$

   Исходя из условия задачи, k и m_5 должны быть целыми. Тогда из последнего уравнения получаем, что $2k - 1 = 7$ и $m_5 = 2$, откуда $k = 4$ и $m_5 = 2$.

   Найденные значения удовлетворяют неравенству $(4+k)m_5 < 20$.

   Тогда число четырехдюймовых равно $m_4 = 3 \cdot 2 = 6$.

   Ответ. 6.

3) Так как многочлен $H(x)$ имеет три действительных корня, то он представим в виде

$$H(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

   где x_i – действительные числа.

   Рассмотрим многочлен

$$H(J(x)) = (J(x) - x_1)(J(x) - x_2)(J(x) - x_3),$$

   который по условию задачи не имеет действительных корней.

Следовательно дискриминант каждого сомножителя вида

$$J(x) - x_i = x^2 + x + 2016 - x_i,$$

должен быть меньше нуля.

Вычислим дискриминант

$$D = 1 - 4(2016 - x_i) < 0,$$
$$(2016 - x_i) > \frac{1}{4},$$

тогда значение многочлена $H(2016) = (2016 - x_1)(2016 - x_2)(2016 - x_3) > \frac{1}{64}$.

Что требовалось доказать.

4) По условию задачи $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.

Рассмотрим $f(f(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}\right)^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{1-x^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{-x^3}{1-x^3}}} = -\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}$

$f(f(f(x))) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(-\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}\right)^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1-x^3}{x^3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}} = x,$

$\underbrace{f(f(f(f(x))))}_{4} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ и т. д.

Таким образом, суперпозиция функций $f(x)$ принимает всего три значения

$$\underbrace{f(\ldots(f(f(x))))}_{n} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}, & n = 1,\ 4,\ 7,\ \ldots \\ -\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}, & n = 2,\ 5,\ 8,\ \ldots \\ x, & n = 3,\ 6,\ 9,\ \ldots \end{cases}$$

Так как 2016 кратно 3, то мы получаем, что $\underbrace{f(\ldots f(f(x))))}_{2016} = x$.

Откуда $\underbrace{f(\ldots f(f(\sqrt[3]{2016}))))}_{2016} = \sqrt[3]{2016}$

Ответ. $\sqrt[3]{2016}$.

5) По условию задачи p и q простые числа, следовательно они являются целыми числами. Тогда $p+q$ и $p-q$ также целые числа. Выполним замену $p-q=m$, где m – целое, тогда $p=m+q$ и исходное соотношение $p+q=(p-q)^3$ перепишется в виде

$$2q + m = m^3.$$

Поделим левую и правую часть на m:

$$\frac{2q}{m}+1=m^2,$$
$$\frac{2q}{m}=m^2-1. \tag{1}$$

Так как m – целое число, то целым числом является m^2-1 и следовательно $\frac{2q}{m}$ – целое, а так как q – простое, то $m=1$ либо $m=2$, либо $m=q$. Подставим значение $m=1$ в выражение (1). Тогда $2\cdot q=0$, откуда $q=0$. Это значение не подходит, т. к. не является простым числом. При подстановке значения $m=2$ в выражение (1) получаем простое число $q=3$ и, вычисляя значение $p=m+q=5$, получаем также простое. При $m=q$ значение $q^2=3$ и q – не целое.

Ответ. $q=3,\ p=5$.

6) Произведение $(n+1)(n+2)..(2n-1)2n$ можно представить в следующем виде $(n+1)(n+2)..(2n-1)2n=\frac{(2n)!}{n!}$. Следовательно нужно показать, что дробь $\frac{(2n)!}{n!}$ делится нацело на $n!$, т. е. $\frac{(2n)!}{n!n!}$ является целым числом.

С другой стороны число сочетаний $C_{2n}^n=\frac{(2n)!}{n!n!}$, а это целое число.

Что требовалось доказать.

7) Рассмотрим первое уравнение системы $y=2-\sqrt{a^2-9+6x-x^2}$ и преобразуем его: $\sqrt{a^2-9+6x-x^2}=2-y$, $\sqrt{a^2-(3-x)^2}=2-y$, откуда $\begin{cases} a^2-(3-x)^2=(2-y)^2, \\ 2-y\geq 0. \end{cases}$

Таким образом, получаем уравнение линии $\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2=a^2, \\ y\leq 2 \end{cases}$ графиком, которой является нижняя полуокружность с центром в точке $(3;2)$ и радиусом $r=|a|$.

Рассмотрим второе уравнение $-x^2+3x+yx+3y+18=0$ и преобразуем его: $(x+3)(-x+y+6)=0$. Таким образом, получаем две прямые с уравнениями $x=-3$, $y=x-6$. Изобразим это плоскости «переменная-значение» (рисунке).

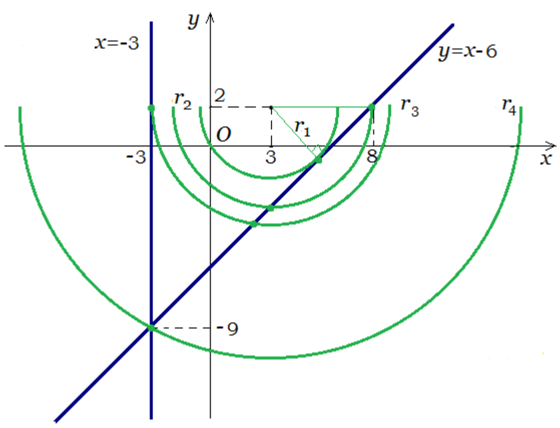

Рисунок. Чертеж к задаче 7

Система имеет два решения при $r \in (r_1; r_2] \cup [r_3; r_4) \cup (r_4; +\infty)$.

Определим значения r_1, r_2, r_3, r_4: значение r_1 как катет из равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 5, то есть $r_1 = 5 : \sqrt{2} = 2{,}5\sqrt{2}$, $r_2 = 5$, $r_3 = 6$, из прямоугольного треугольника с катетами 6 и 11 найдем гипотенузу $r_4 = \sqrt{6^2 + 11^2} = \sqrt{157}$.

Значит, $|a| \in (2{,}5\sqrt{2};\ 5] \cup [6; \sqrt{157}) \cup (\sqrt{157}; +\infty)$.

В итоге получаем $a \in (-\infty; -\sqrt{157}) \cup (-\sqrt{157}; -6] \cup [-5; -2{,}5\sqrt{2}) \cup (2{,}5\sqrt{2};\ 5] \cup [6; \sqrt{157}) \cup (\sqrt{157}; +\infty)$.

Ответ. $a \in (-\infty; -\sqrt{157}) \cup (-\sqrt{157}; -6] \cup [-5; -2{,}5\sqrt{2}) \cup (2{,}5\sqrt{2};\ 5] \cup [6; \sqrt{157}) \cup (\sqrt{157}; +\infty)$.

Заключение

В апреле 2016 года на физико-математическом факультете Камчатского государственного университета имени Витуса Беринга была проведена математическая олимпиада для школьников – вторая в 2015/2016 уч. году. Ее проведение было связано с привлечением потенциальных абитуриентов вузов к специальностям физико-математического профиля и организацией дополнительного тренировочного испытания перед сдачей ЕГЭ и ГИА. Победитель и призеры олимпиады «Витус Беринг» в случае участия во вступительном конкурсе в КамГУ им. Витуса Беринга получают дополнительные баллы к результатам ЕГЭ.

Авторы надеются, что представленные задачи и их решения помогут школьникам в подготовке к экзаменационным испытаниям и поступлении в избранные ими вузы.

Список литературы

[1] Водинчар Г.М., Жданова О.К., Островерхая Л.Д., Паровик Р.И., Пережогин А.С., Шереметьева О.В., Яковлева Т.П., “Решения задач математической олимпиады «ВИТУС БЕРИНГ – 2015»”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2015, № 2(11), 96–101.

[2] *34-й Турнир имени М. В. Ломоносова 25 сентября 2011 года. Задания. Решения. Комментарии*, МЦНМО, М., 2013, 197 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 28.04.2016