Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 2(13). C. 55-61. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-13-2-55-61

УДК 517. 925.42

ОБ ОДНОЙ ЭРЕДИТАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ

Д. В. Макаров

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: danil-makarov-pk@ya.ru

В работе предложена математическая модель, которая обобщает известную модель Дубовского, используемую для прогнозирования экономических кризисов. Это обобщение заключается в учете эффекта памяти, который часто возникает в экономической системе. С помощью численных методов, получено решение обобщенной модели, согласно которому были построены фазовые траектории.

Ключевые слова: циклы Кондратьева, экономический кризис, модель Дубовского, оператор дробной производной Герасимова-Капуто, эффект памяти, фрактальная размерность

MSC 93A30

ON A DYNAMIC HEREDITARITY SYSTEM THAT SIMULATES THE ECONOMIC CYCLE

D. V. Makarov

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: danil-makarov-pk@ya.ru

The paper presents a mathematical model that generalizes the famous Kondratiev cycles model (model Dubovskiy) used to predict economic crises. This generalization is to integrate the memory effect, which occurs frequently in the economic system. With the help of numerical methods, to receive a generalized model, according to which the phase paths have been built.

Key words: cycles, the economic crisis, the model Dubovskiy, fractional derivative operator Gerasimova-Caputo, a memory effect, the fractal dimension

Введение

Важность математического моделирования экономических процессов неоспорима. Это обусловлено тем, что математическое описание экономических систем дает количественное и качественное представление о экономических показателях с целью их дальнейшего прогнозирования в следующие промежутки времени, а также рекомендации для принятия правильного управленческого решения [1]. Для нас наибольший интерес представляет исследование экономических кризисов, так как именно они определяют экономическое благосостояние граждан и степень социального напряжения в стране. Еще в 20-е годы прошлого века советский экономист Н.Д. Кондратьев выделил во временных экономических рядах долгосрочные периодические колебания (волны) с длительностью 50-55 лет [2]. Далее другие исследователи в последствие аналогично выявили волны другой длительности, например, волны базовых инвестиций [3] и т.д. Наиболее полное математическое описание моделирования циклов Кондратьева было проведено, на наш взгляд, в работах С.В. Дубовского [4]-[6]. В настоящей работе была предложена математическая модель, которая обобщает известную модель Дубовского в случае учета эффектов памяти в экономической системе и является логическим продолжением работ [7] и [8]. Эффекты памяти описываются с помощью теории дробного исчисления, а именно производных дробного порядка [9]. Такие модели можно найти в работах зарубежных авторов [10]-[14], а также в работах отечественных авторов [15]-[17].

Постановка задачи

Обобщенная модель циклов Кондратьева может быть представлена в виде:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_{0t}^{\alpha}x(\tau) = -\lambda n x(t)\left(x(t)-1\right)\left(y(t)-y^*\right), \\ \partial_{0t}^{\beta}y(\tau) = n(1-n)y^2(t)\left(x(t)-x^*\right)+f(t), \\ x(0)=a, y(0)=b. \end{array}\right. \tag{1}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha}x(\tau) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \dfrac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}$ и $\partial_{0t}^{\beta}y(\tau) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^t \dfrac{\dot{y}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\beta}}$ – производные дробных порядков $0<\alpha,\beta<1$ в смысле Герасимова-Капуто; $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера; $x(t)$ - эффективность новых технологий; $y(t)$ - эффективность фондоотдачи; x^* и y^* - равновесное стационарное решение системы (1); n - норма накопления; λ - коэффициент, который определяется из статистики временного ряда; $f(t)$ - внешнее воздействие на экономическую систему; $t\in[0,T]$- временная координата, T - время моделирования процесса; a и b - начальные условия, заданные константы.

Заметим, что нелинейная система (1) в случае значений параметров $\alpha=\beta=1$ и $f(t)=0$ переходит в модель Дубовского [4]. Поэтому очевидно, что решение системы (1) будет обобщать решение модели Дубовского. Решение нелинейной системы ([1]) будем искать с помощью численных методов – конечно разностных схем. Разобьем временной отрезок $[0,T]$ на N равных частей, с шагом τ. Аппроксимацию дробных производных в уравнении ([1]) проводим согласно работе [18]. Тогда система (1) запишется в конечно-разностной постановке в виде:

$$\begin{cases} x_0 = a, y_0 = b, \\ x_1 = x_0\left(1-\dfrac{\lambda n}{A}(x_0-1)(y_0-y^*)\right), y_1 = y_0\left(1+\dfrac{n(1-n)}{B}y_0(x_0-x^*)\right), j=0, \\ x_2 = x_1\left(1-\dfrac{\lambda n}{A}(x_1-1)(y_1-y^*)\right), y_2 = y_1\left(1+\dfrac{n(1-n)}{B}y_1(x_1-x^*)\right), j=1, \\ x_{j+1} = x_j\left(1-\dfrac{\lambda n}{A}(x_j-1)(y_j-y^*)\right) - \sum\limits_{k=1}^{j-1} p_k\left(x_{j-k+1}-x_{j-k}\right), \\ y_{j+1} = y_j\left(1+\dfrac{n(1-n)}{B}y_j(x_j-x^*)\right) - \sum\limits_{k=1}^{j-1} q_k\left(x_{j-k+1}-x_{j-k}\right)+f_j, j=2,...,N-1, \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $A = \dfrac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$, $B = \dfrac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}, p_k = (1+k)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}, q_k = (1+k)^{1-\beta} - k^{1-\beta}$.

Решение (2) в случае, когда $\alpha = \beta = 1$ и $f_j = 0$ переходит в решение для модели Дубовского [4]. Исследуем решение (2) в зависимости от различных значений дробных параметров α и β, а также построим фазовые траектории. В этой работе мы не останавливаемся на вопросах устойчивости или сходимости явной конечно разностной схемы (2).

Результаты моделирования

Параметры моделирования возьмем из работы [4] $x^* = 1.3, y^* = 0.5, n = 0.2, \lambda = 2.25, x(0) = 1.35, y(0) = 0.5, T = 250, \alpha = \beta = 1$.

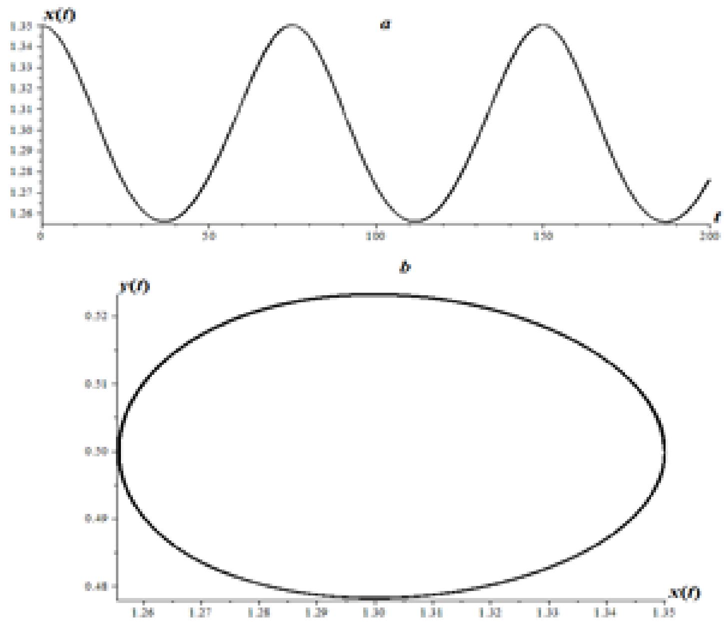

Рис. 1. Расчетная кривая a и фазовая траектория b в случае $f(t) = 0$

На рис.1 приведен случай, который соответствует случаю из работы [5] при моделировании цикла Кондратьева с периодом 50.1 лет. Так же можно увидеть, что фазовая траектория (рис. 1b) имеет эллипсоидную замкнутую форму, равновесное состояние системы называется центром. Амплитуда колебаний в этом случае постоянна (рис. 1a).

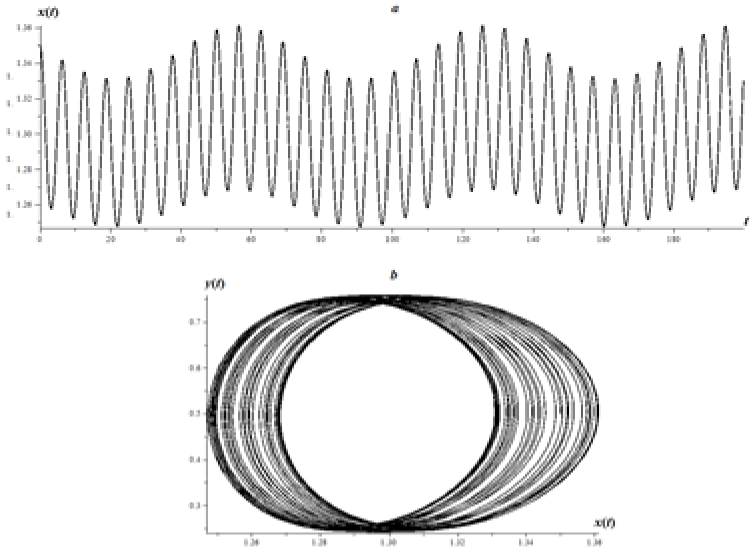

Рис. 2. Расчетная кривая a и фазовая траектория b в случае $f(t) = \delta\cos(\omega t)$

На рис.2 приведен случай, когда на систему (1) воздействует внешнее периодическое воздействие $f(t) = \delta\cos(\omega t)$– инвестиционные циклы. Значения параметров – $\delta = 0.01$и $\omega = 1$. Можно сделать вывод, что внешнее периодическое воздействие дает цикл периодом около 7 лет, что соответствует базовым инвестиционным циклам Жугляра [6], а главный цикл составляет 60 лет, что соответствует верхней границе цикла Кондратьева [2]. Такая комбинированная модель, наиболее гибко описывает экономические кризисы.

На рис. 3 приведен случай, когда $f(t) = 0$, $\alpha = 0.8$ и $\beta = 1$, а остальные параметры остаются без изменения.

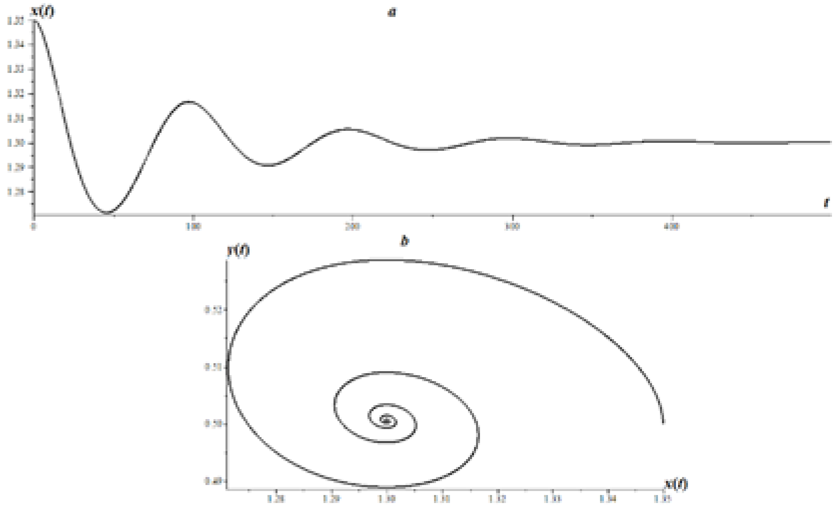

Рис. 3. Расчетная кривая a и фазовая траектория b в случае $\alpha = 0.8, \beta = 1$ и $f(t) = 0$

Из рис. 3a видно, что процесс колебаний является затухающим, а фазовая траектория рис. 3b является незамкнутой, положение равновесия системы называется устойчивым фокусом. В этом случае циклов не существует, однако, если ввести в рассмотрение функцию внешнего воздействия $f(t) = \delta\cos(\omega t)$, которую можно интерпретировать как инвестиционные циклы, то приходим к следующему результату (рис. 4).

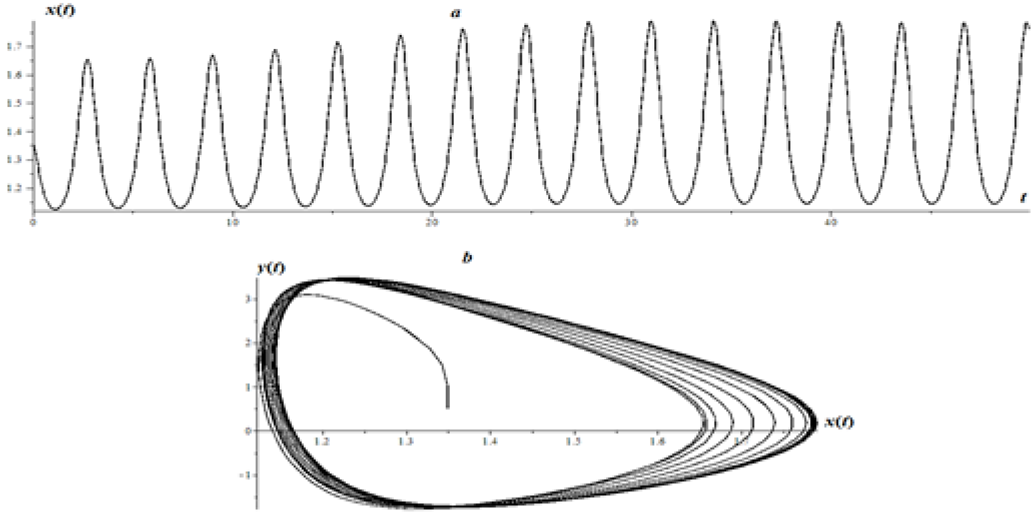

Рис. 4. Расчетная кривая a и фазовая траектория b в случае $\alpha = 0.8, \beta = 0.6$ и $f(t) = \delta \cos(\omega t), \delta = 0.5, \omega = 2$

На рис. 3a видно, сначала амплитуда колебаний возрастает, а потом выходит на постоянный режим, это видно на фазовой траектории рис.3b, которая со временем выходит на постоянный режим или предельный цикл, который можно использовать в исследовании циклов Кондратьева. На следующих рисунках (рис. 5 и рис. 6) мы также видим, что фазовые траектории выходят на предельный цикл.

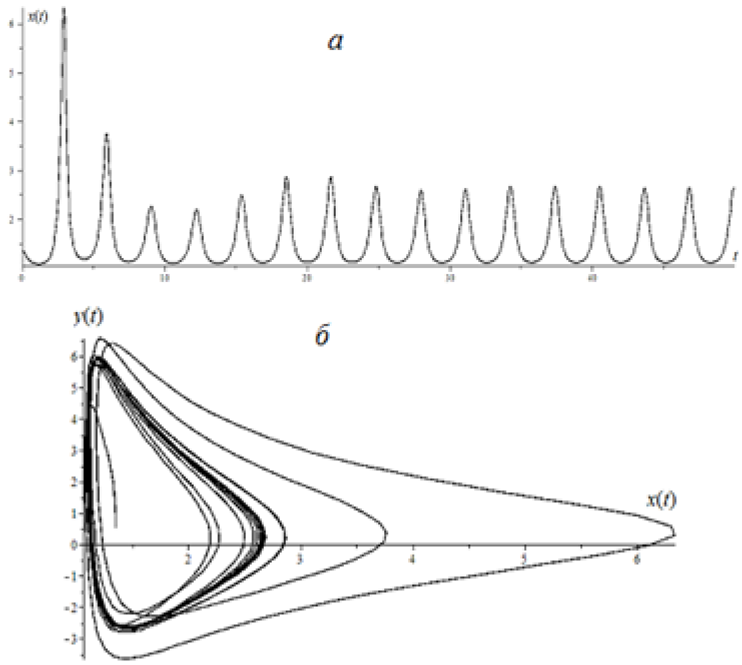

Рис. 5. Расчетная кривая a и фазовая траектория b в случае $\alpha = 0.8, \beta = 0.8$ и $f(t) = \delta \cos(\omega t), \delta = 0.5, \omega = 2$

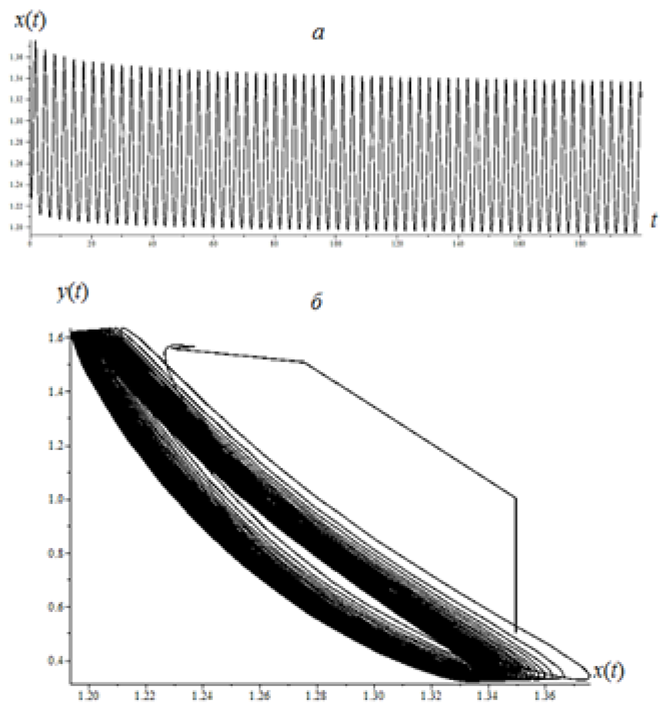

Рис. 6. Расчетная кривая a и фазовая траектория $б$ в случае $\alpha = 0.1, \beta = 0.1$ и $f(t) = \delta\cos(\omega t), \delta = 0.5, \omega = 2$

Заключение

В работе предложена обобщенная модель Дубовского, которая учитывает эффекты памяти (экономические барьеры) в экономической системе. Получено численное решение такой модели и построены фазовые траектории. Показано, что введение производных дробного порядка приводит к затухающим процессам, однако если в системе существует внешнее периодическое воздействие, то система выходит на предельный цикл, который можно считать тем или иным экономическим циклом.

Список литературы

[1] Паровик Р. И., “Моделирование выбора руководством высшего учебного заведения оптимального решения, согласованного с управляющими решениями его филиалов”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2013, № 1(6), 5–11.

[2] Кондратьев Н. Д., Опарин Д. Н., *Большие циклы конъюнктуры*, Институт экономики, М., 1928, 287 с.

[3] Mensch G., *Stalemate in Technology. Innovations Overcome the Depression*, Ballinger Pub Co., Cambrg., 1979, 241 pp.

[4] Дубовский С. В., “Объект моделирования – цикл Кондратьева”, *Математическое моделирование*, **7**:6 (1995), 65–74.

[5] Дубовский С. В., “Моделирование циклов Кондратьева и прогнозирование кризисов”, *Кондратьевские волны. Аспекты и перспективы*, ред. А. А. Акаев, Учитель, Волгоград, 2012, 179–188.

[6] Дубовский С. В., “Прогнозирование катастроф (на примере циклов Н.Д. Кондратьева)”, *Общественные науки и современность*, 1993, № 5, 82–91.

[7] Макаров Д. В., “Экономико-математическое моделирование инновационных систем”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2014, № 1(8), 66–70.

[8] Макаров Д. В., Паровик Р. И., "Обобщенная математическая модель Дубовского для прогнозирования экономических кризисов", *Научно-технический вестник Поволжья*, 2016, № 1, 74–77.

[9] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с.

[10] Boleantu M., "Fractional dynamical systems and applications in economy", *Differential Geometry - Dynamical Systems*, **10** (2008), 62–70.

[11] Yiding Y., Lei H., Guanchun L., "Modeling and application of new nonlinear fractional financial model", *Journal of Applied Mathematics*, 2013.

[12] Tejado I., Duarte V., Nuno V., Fractional Calculus in Economic Growth Modeling. (The Portuguese case. Conference: 2014 International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (FDA'14).).

[13] Mendes R. V., "A fractional calculus interpretation of the fractional volatility model", *Nonlinear Dyn.*, 2008.

[14] Zhenhua H., Xiaokang T., "A new discrete economic model involving generalized fractal derivative", *Advances in Difference Equations*, **65** (2015).

[15] Шпилько Я. Е., Соломко А. А., Паровик Р. И., "Параметризация уравнения Самуэльсона в модели Эванса об установлении равновесно цены на рынке одного товара", *2012*, № 2(5), 33–36.

[16] Самута В. В., Стрелова В. А., Паровик Р. И. Нелокальная модель неоклассического экономического роста Солоу, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2012, № 2(5), 37–41.

[17] Нахушева З. А., "Об одной односекторной макроэкономической модели долгосрочного прогнозирования", *Доклады АМАН*, **14**:1 (2012), 124–127.

[18] Паровик Р. И., *Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов.*, КамГУ имени Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 2015, 178 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 25.03.2016