

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-13-2-50-54

УДК 517. 925.42

ОСЦИЛЛЯТОР ДУФФИНГА С ВНЕШНИМ ГАРМОНИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ И ПРОИЗВОДНОЙ ПЕРЕМЕННОГО ДРОБНОГО ПОРЯДКА РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩАЯ ВЯЗКОЕ ТРЕНИЕ

В. А. Ким

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: valentinekim93@mail.ru

В работе предложено обобщение осциллятора Дуффинга с вязким эредитарным трением, которое представлено оператором производной переменного дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля. Построена явная конечно разностная схема для вычисления приближенного решения, а также фазовые траектории при различных значениях управляющих параметров.

Ключевые слова: производная Римана-Лиувилля, производная Грюнвальда-Летникова, эредитарность, осциллятор Дуффинга, фазовая траектория

© Ким В. А., 2016

MSC 34C26

DUFFING OSCILLATOR WITH AN EXTERNAL HARMONIC IMPACT AND DERIVED VARIABLES FRACTIONAL RIEMANN-LIOUVILLE, IS CHARACTERIZED BY VISCOUS FRICTION

V. A. Kim

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky,
Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: valentinekim93@mail.ru

The paper suggested a generalization of Duffing oscillator with viscous friction hereditarity, which is represented by the operator of fractional order derivative of the variable in the Riemann-Liouville. Built explicit finite difference scheme for calculating approximate solutions, as well as the phase trajectories for different values of the control parameters.

Key words: Riemann-Liouville derivative Grunwald-Letnikova, hereditarity, Duffing oscillator, phase trajectory

© Kim V. A., 2016

Введение

В настоящее время широкое развитие получило одно из научных направлений нелинейной динамики – дробная динамика. Суть, которой состоит в учете эффектов памяти и последействия, характеризующимся производными дробных порядков. Более подробно вопросы исследования таких систем изложены в книге И. Петраса [1], в книге В.В. Учайкина [2] рассматриваются элементы эредитарной динамики, которая включает дробную динамику как частный случай.

В работе [3] была предложена модель осциллятора Дуффинга с фрактальным трением. Фрактальное трение обладает свойствами вязкого трения за счет степенного ядра в интегральном операторе («тяжелые хвосты»). Поэтому такой осциллятор может иметь различные приложения, например [4] или [5].

В настоящей работе мы продолжим изучать осциллятор Дуффинга с фрактальным трением, но порядок дробной производной будет представлять собой функцию от времени, а не константу как в работе [3]. Далее построим численную явную конечно-разностную схему для счета приближенного решения соответствующей задачи Коши, а также на основе численного решения построим и исследуем фазовые траектории.

Постановка задачи

Найти решение $x(t)$, где $t \in [0, T]$ следующей задачи Коши:

$$\ddot{x}(t) + \alpha D_{0t}^{q(t)} x(\tau) - x(t) + x^3(t) = \delta \cos(\omega t), \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \quad (1)$$

где $D_{0t}^{q(t)} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(q(t))} \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-q(t)}}$ – производная Римана-Лиувилля переменного дробного порядка $0 < q(t) < 1$, α – коэффициент вязкого трения, δ и ω – амплитуда и частота внешней периодической силы, x_0 и y_0 – заданные константы, начальные условия.

Случай, когда $q(t)$ представляет константу был подробно исследован в работе [3]. В работе [6] была рассмотрена модель эредитарного осциллятора Дуффинга с производной Герасимова-Капуто.

Задачу Коши (1) удобно представить в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ D_{0t}^{q(t)} x(\tau) = w(t), \\ \dot{y}(t) = x(t) + \alpha w(t) - x^3(t) + \delta \cos(\omega t), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2), в силу нелинейности, не имеет точного решения, поэтому будем искать приближенное решение с помощью теории конечно-разностных схем [7]-[9]. Разобьем отрезок $[0, T]$ на N равных частей с шагом h . Решение дифференциальной задачи $x(t)$ перейдет в приближенное сеточное решение $x(t_k)$, $t_k = kh$, $k = 1, \dots, N$. Производную дробного порядка в системе (2) аппроксимируем разностным аналогом – обобщенный производной Грюнвальда-Летникова [10]:

$$D_{0t}^{q(t)} x(\tau) \approx \frac{1}{h^{q_{k-1}}} \sum_{j=0}^{k-1} c_j^{(q_{k-1})} x_{k-j} = \frac{x_k}{h^{q_{k-1}}} + \sum_{j=1}^{k-1} c_j^{(q_{k-1})} x_{k-j}, \quad (3)$$

$$c_0^{(q_{k-1})} = 1, c_j^{(q_{k-1})} = \left(1 - \frac{1 + q_{k-1}}{j}\right) c_{j-1}^{(q_{k-1})},$$

а целочисленные производные:

$$\dot{x}(t) \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{h}, \dot{y}(t) \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{h}. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в систему (2), приходим к следующему приближенному решению задачи Коши:

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + h y_{k-1}, \\ x_k = w_{k-1} h^{q_{k-1}} - \sum_{j=1}^{k-1} c_j^{(q_{k-1})} x_{k-j}, \\ y_k = y_{k-1} + [\alpha w_{k-1} - x_{k-1}^3 + \delta \cos(\omega(k-1))] h. \end{cases} \quad (5)$$

Можно отметить, исходя из работы [10], что аппроксимация (5) дифференциальной задачи (2) имеет первый порядок. Мы не будем проводить исследования явной схемы (5) на устойчивость и сходимость. Явные схемы, как правило условно устойчивы, т.е. существует ограничение на шаг h .

Оценить шаг h можно с помощью метода двойного счета [11]. Также для выбранных управляющих параметров можно провести эксперимент по исследованию устойчивости по правой части или начальным данным. Если схема устойчива с первым порядком, то по теореме Лакса она сходится с таким же порядком.

Устойчивость точки покоя системы (2) можно провести по аналогии работы [12]. Рассмотрим некоторые результаты моделирования осциллятора Дуффинга с фрактальным трением.

Результаты моделирования

Пример 1. Рассмотрим численное решение задачи Коши (2) с значениями следующих управляющих параметров: $q(t) = q_0 - A \exp(-\sin(\omega t))$, $q_0 = 0.9$, $A = 0.08$, $\omega = 1$, $\delta = 0.3$, $\alpha = 0.15$, $x_0 = 0.3$, $y_0 = 1.51$, $N = 3300$, $T = 150$, $h = 0.0454$.

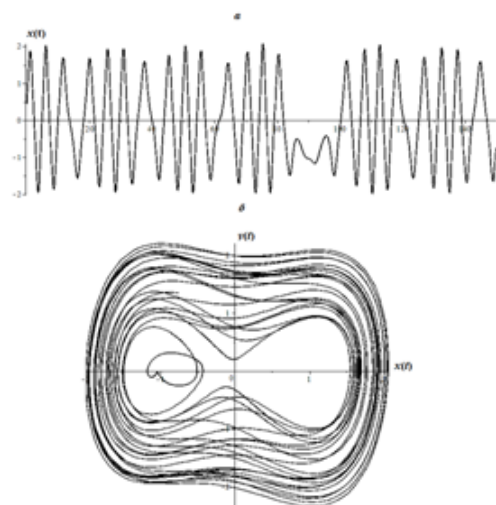


Рис. 1. Кривая численного решения - а и ее фазовая траектория - б

На рис. 1(а, б). приведена кривая численного решения и ее фазовая траектория для эредитарного осциллятора Дуффинга (5) с дробным показателем $q(t) = q_0 - A \exp(-\sin(\omega t))$. Фазовая траектория выходит на регулярный хаотический аттрактор.

Пример 2. Рассмотрим численное решение задачи Коши (2) с значениями следующих управляющих параметров: $q(t) = q_0 - A/\exp(\cos(\omega t))$, $q_0 = 0.9$, $A = 0.05$, $\omega = 100$, $\delta = 30$, $\alpha = 0.15$, $x_0 = 0.3$, $y_0 = 1.51$, $N = 4000$, $T = 20$, $h = 0.005$.

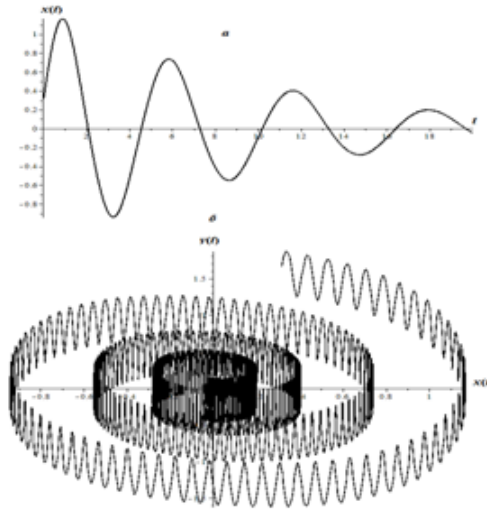


Рис. 2. Кривая численного решения - а и ее фазовая траектория – б

На рис. 2(а,б) видно, что сначала происходят затухающие колебания, а потом фазовая траектория выходит на предельный цикл.

Заключение

В работе предложена модель эредитарного осциллятора Дуффинга с производной переменного дробного порядка. Для этой модели была составлена численная конечно-разностная схема. В зависимости от различных управляющих параметров с помощью этой схемы были построены осциллограммы и фазовые траектории. Показано, что фазовые траектории выходят на предельный цикл. Интерес представляет также исследование других нелинейных эредитарных осцилляторов.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Р.И. Паровику за ценные замечания и советы, которые послужили лучшему осмыслению результатов моделирования.

Список литературы

- [1] Petras I., *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*, Springer, New York, 2011, 218 pp.
- [2] Учайкин В. В., *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008, 512 с.
- [3] Syta A., Litak G., Lenci S., Scheffler M., “Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **24**:1 (2014), 013107.
- [4] Gao X., Yu J., “Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing’s oscillators”, *Chaos, Solitons & Fractals*, **24**:4 (2005), 1097–1104.

- [5] Rossikhin Y. A., Shitikova M. V., “Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results”, *Applied Mechanics Reviews*, **63**:1 (2010), 010801.
- [6] Паровик Р. И., “Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2015, № 1(10), 18–24.
- [7] Паровик Р. И., “О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка от времени”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2014, № 1(8), 60–65.
- [8] Паровик Р. И., “Численный анализ некоторых осцилляционных уравнений с производной дробного порядка”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2014, № 2(9), 30–35.
- [9] Паровик Р. И., “Об одной конечно-разностной схеме для математической модели нелинейного эрдитарного осциллятора”, *Международный научно-исследовательский журнал*, 2016, № 4-2(9), 138–142.
- [10] Петухов А. А., Ревизников Д. Л., “Алгоритмы численных решений дробно-дифференциальных уравнений”, *Вестник МАИ*, **16**:6 (2009), 228–243.
- [11] Марчук Г. И., *Вычислительные методы*, Наука, М., 1977, 456 с.
- [12] Паровик Р. И., “Об исследовании устойчивости эрдитарного осциллятора Ван-дер-Поля”, *Фундаментальные исследования*, 2016, № 3-2, 283–287.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 16.04.2016