Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 2(13). C. 34-42. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-13-2-34-42

УДК 517.956.6

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

М. Мамажонов, С. М. Мамажонов, Х. Б. Мамадалиева

Кокандский государственный педагогический институт им. Мукимий, 113000, Узбекистан, г. Коканд, ул. Амира Темура, 37

E-mail: bek84-08@mail.ru

Настоящая статья является примером применения методов построения решения, интегральных и дифференциальных уравнений. Здесь рассматривается уравнение параболо-гиперболического типа вида $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0$ в пятиугольной области. Доказывается теорема об однозначной разрешимости одной из поставленных двух задач.

Ключевые слова: дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, краевые задачи, параболо-гиперболический тип, однозначная разрешимость

MSC 35M13

SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR AN EQUATION OF THE THIRD ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE IN A PENTAGONAL AREA

M. Mamazhonov, S. M. Mamazhonov, Kh. B. Mamadalieva

Kokand State Pedagogical Institute. Muqimiy, 113000, Uzbekistan, Kokand, st. Amir Temur, 37

E-mail: bek84-08@mail.ru

This article is an example of the application of methods for constructing solutions of integral and differential equations. Here we consider the equation of parabolic-hyperbolic type $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0$ in a pentagonal area. We prove a theorem on the unique solvability of a set of two tasks.

Key words: differential and integral equations, a method of constructing solutions, boundary problems, parabolic-hyperbolic type, unique solvability

Введение

Настоящая работа посвящена изучению методики исследования некоторых краевых задач для одного класса параболо-гиперболических уравнений третьего порядка в пятиугольной области, которые используются при изучении задач математической физики. Эта работа является логическим продолжением работ [1] и [2].

Постановка задачи

В области D плоскости xOy рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0, \tag{1}$$

где

$$Lu=\begin{cases} u_{1xx}-u_{1y}, & (x,y)\in D_1, \\ u_{ixx}-u_{iyy}, & (x,y)\in D_i \ (i=2,3), \end{cases},$$

$$u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in D_i\ (i=1,2,3,4),$$

$$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4\cup J_1\cup J_2\cup J_3\cup J_4, D_1=\left\{(x,y)\in R^2:\ 0<x<1,\ 0<y<1\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y)\in R^2:\ -1<y<0,\ 0<x<y+1\right\}, D_3=\left\{(x,y)\in R^2:\ -1<x<0,\ -x-1<y<0\right\},$$

$$D_4=\left\{(x,y)\in R^2:\ -1<x<0,\ 0<y<x+1\right\}, J_1=\left\{(x,y)\in R^2:\ y=0,\ 0<x<1\right\}$$

$$J_2=\left\{(x,y)\in R^2:\ y=0,\ -1<x<0\right\}, J_3=\left\{(x,y)\in R^2:\ x=0,\ -1<y<0\right\},$$

$J_4=\left\{(x,y)\in R^2: x=0,\ 0<y<1\right\}$, то есть D_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$, D_2 – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0,-1)$, D_3 – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $D(-1,0)$, $C(0,-1)$, D_4 –треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $D(-1,0)$, $A_0(0,1)$, J_1 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, J_2 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0;0)$, $D(-1,0)$, J_3 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0;0)$, $C(0,-1)$, J_4 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0;0)$, $A_0(0,1)$.

Кроме того, области D_i $(i=2,3,4)$ запишем в следующем виде: $D_i=D_{i1}\cup D_{i2}\cup AC_{i-1}$, здесь D_{21} – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, D_{22} – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $E_1(0;-1)$, $C_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, D_{31} – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $E_1(0;-1)$, $C_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, D_{32} – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $E_2(-1;0)$, $C_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, D_{41} – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $A_0(0;1)$, $C_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, D_{42} – треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $E_2(-1;0)$, $C_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, AC_1 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0;0)$, $C_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, AC_2 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0;0)$, $C_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, AC_3 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0;0)$, $C_3\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, то есть $AC_1=\left\{(x,y)\in R^2:\ 0<x<\frac{1}{2},\ y=-x\right\}$, $D_{21}=\left\{(x,y)\in R^2:\ -\frac{1}{2}<y<0,\ -y<x<y+1\right\}$, $D_{22}=\left\{(x,y)\in R^2:\ 0<x<\frac{1}{2},\ x-1<y<-x\right\}$, $AC_2=\left\{(x,y)\in R^2:\ -\frac{1}{2}<x<0,\ y=x\right\}$, $D_{31}=\left\{(x,y)\in R^2:\ -\frac{1}{2}<x<0,\ -x-1<y<x\right\}$, $D_{32}=\left\{(x,y)\in R^2:\ -\frac{1}{2}<y<0,\ -y-1<x<y\right\}$, $AC_3=\left\{(x,y)\in R^2:\ -\frac{1}{2}<x<0,\ y=-x\right\}$, $D_{41}=\left\{(x,y)\in R^2:\ -\frac{1}{2}<x<0,\ -x<y<x+1\right\}$, $D_{42}=\left\{(x,y)\in R^2:\ 0<y<\frac{1}{2},\ y-1<x<-y\right\}$.

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача 1. *Найти функцию $u(x,y)$, которая*

1) непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в области D при $x \neq 0,\ y \neq 0$;

3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u_1(1, y) = \varphi_1(y), \ \ 0 \leq y \leq 1, \tag{2}$$

$$u_2|_{E_1} = \psi_1(x), \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$u_3|_{E_2} = \psi_2(x), \ -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u_3}{\partial n}\right|_D = \psi_3(x), \ -1 \leq x \leq 0, \tag{5}$$

$$u_4|_{A_0E_3} = \psi_4(x), \ -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \tag{6}$$

4) удовлетворяет следующим непрерывным условиям склеивания на отрезках J_1 и J_2:

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \tau_1(x), \ 0 \leq x \leq 1, \tag{7}$$

$$u_{1y}(x, 0) = u_{2y}(x, 0) = \nu_1(x), \ 0 \leq x \leq 1, \tag{8}$$

$$u_{1yy}(0, y) = u_{2yy}(0, y) = \mu_1(x), \ 0 \leq x \leq 1, \tag{9}$$

$$u_3(x, 0) = u_4(x, 0) = \tau_2(x), \ -1 \leq x \leq 0, \tag{10}$$

$$u_{3y}(x, 0) = u_{4y}(x, 0) = \nu_2(x), \ -1 \leq x \leq 0, \tag{11}$$

$$u_{3yy}(x, 0) = u_{4yy}(x, 0) = \mu_2(x), \ -1 \leq x \leq 0, \tag{12}$$

$$u_2(0, y) = u_3(0, y) = \tau_3(y), \ -1 \leq y \leq 0, \tag{13}$$

$$u_{2x}(0, y) = u_{3x}(0, y) = \nu_3(y), \ -1 \leq y \leq 0 \tag{14}$$

$$u_{2xx}(0, y) = u_{3xx}(0, y) = \mu_3(y), \ -1 \leq y \leq 0, \tag{15}$$

$$u_3(0, y) = u_4(0, y) = \tau_4(y), \ 0 \leq y \leq 1, \tag{16}$$

$$u_{3x}(0, y) = u_{4x}(0, y) = \nu_4(y), \ 0 \leq y \leq 1, \tag{17}$$

$$u_{3xx}(0, y) = u_{4xx}(0, y) = \mu_4(y), \ 0 \leq y \leq 1. \tag{18}$$

Здесь $\psi_i\ (1, 2, 3, 4)$, ϕ_1 (заданные достаточно гладкие функции, а $\tau_1, \nu_1, \mu_1, \tau_2, \nu_2, \mu_2, \tau_3, \nu_3, \mu_3, \tau_4, \nu_4, \mu_4$ (неизвестные пока достаточно гладкие функции, причем выполняются условия согласования $\tau_1(1) = \phi_1(0) = \psi_1(1)$.

Задача 2. *Эта задача отличается от задачи 1 лишь тем, что здесь вместо условия (4) и (6) берется условие*

$$u_3|_D = \psi_2(x), \ -1 \leq x \leq .0$$

Остальные условия остаются без изменений.

Здесь мы будем ограничимся рассмотрением только задачи 1.

Теорема. *Если $\phi_1 \in C^3[0, 1]$, $\psi_1 \in C^3\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\psi_3 \in {}^2[-1, 0]$, $\psi_2, \psi_4 \in {}^3\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, причем выполняется условие согласования $\psi_1(0) = \psi_2(0)$, то задача 1 допускает единственное решение.*

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1(x-y),\ (x,y) \in D_1, \tag{19}$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_i(x-y),\ (x,y) \in D_i\ \ (i = 2,3,4), \tag{20}$$

где введено обозначение $u(x,y) = u_i(x,y),\ (x,y) \in D_i\ \left(i = \overline{1,4}\right)$, причем функции $\omega_i(x-y)$, $i = \overline{1,4}$ неизвестные пока достаточно гладкие функции.

Если учитываем виды областей D_i, $(i = 2,3,4)$, которые написаны наверху, то уравнение (20) $(i = 2,3,4)$ можно переписать в виде

$$u_{ikxx} - u_{ikyy} = \omega_{ik}(x-y),\ (x,y) \in D_{ik}\ \ (i = 2,3,4;\ k = 1,2), \tag{21}$$

где введены обозначения $u_i(x,y) = u_{ik}(x,y)$, $\omega_i(x-y) = \omega_{ik}(x-y)$.

Рассмотрим сначала задачу в области D_{31}. Запишем решение уравнения (21) $(i = 3;\ k = 1)$, удовлетворяющее условиям (13),(14):

$$u_{31}(x,y) = \frac{\tau_3(y+x) + \tau_3(y-x)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x} \nu_3(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^x d\eta \int\limits_{y-x+\eta}^{y+x-\eta} \omega_{31}(\eta - \xi)\,d\xi \tag{22}$$

Условие (5) можно переписать в виде

$$\left.\left(\frac{\partial u_{31}}{\partial x} + \frac{\partial u_{31}}{\partial y}\right)\right|_{y=-x-1} = \sqrt{2}\psi_3(x). \tag{23}$$

Дифференцируя (22) по xи y и подставляя их в (23), затем дифференцируя полученное уравнение и меняя $2x-1$ на $x-y$, находим

$$\omega_{31}(x-y) = \sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{x-y-1}{2}\right),\ 0 \le x-y \le 1. \tag{24}$$

Теперь переходя в уравнениях (21) $(i = 2;\ k = 2)$ и (21) $(i = 3;\ k = 1)$ к пределу при $x \to 0$ и учитывая (13), (15), получим уравнения $\mu_3(y) - \tau_3''(y) = \omega_{22}(-y)$ и $\mu_3(y) - \tau_3''(y) = \omega_{31}(-y)$. Из этих уравнений видно, что $\omega_{22}(-y) = \omega_{31}(-y)$. В этом равенстве меняя $-y$ на $x-y$, в силу (24) получим

$$\omega_{22}(x-y) = \omega_{31}(x-y) = \sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{x-y-1}{2}\right),\ 0 \le x-y \le 1 \tag{25}$$

Подставляя (22) в (4), затем дифференцируя полученное уравнение и меняя $-2x-1$ на y, приходим к соотношению

$$\tau_3'(y) - \nu_3(y) = \delta_1(y),\ -1 \le y \le 0, \tag{26}$$

где $\delta_1(y)$ – известная функция.

Переходим в область D_{22}. Запишем решение уравнения (21) $(i = 2;\ k = 2)$, удовлетворяющего условиям (13), (14):

$$u_{22}(x,y) = \frac{\tau_3(y+x) + \tau_3(y-x)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x} \nu_3(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^x d\eta \int\limits_{y-x+\eta}^{y+x-\eta} \omega_{22}(\eta - \xi)\,d\xi \tag{27}$$

Подставляя (27) в (3) и дифференцируя полученное уравнение и меняя $2x-1$ на y, получим соотношение

$$\tau_3'(y)+\nu_3(y)=\delta_2(y),\ -1\leq y\leq 0, \tag{28}$$

где $\delta_2(y)$ – известная функция.

Из (26) и (28) находим

$$\nu_3(y)=\frac{1}{2}\left[\delta_2(y)-\delta_1(y)\right], \tag{29}$$

$$\tau_3'(y)=\frac{1}{2}\left[\delta_2(y)+\delta_1(y)\right].$$

Интегрируя последнее равенство от -1 до y, имеем

$$\tau_3(y)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{y}\left[\delta_2(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_1(0).$$

Таким образом, мы нашли функции $u_{31}(x,y)$ и $u_{22}(x,y)$.

Теперь переходим в область D_{21}. Запишем решение уравнения (21) ($i=2$; $k=2$), удовлетворяющего условиям (7), (8):

$$u_{21}(x,y)=\frac{\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu_1(t)\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\omega_{21}(\xi-\eta)\,d\xi \tag{30}$$

Дифференцируя (27) и (30) по x и y и подставляя их в условие $\left.\left(\frac{\partial u_{21}}{\partial x}+\frac{\partial u_{21}}{\partial y}\right)\right|_{y=-x}=\left.\left(\frac{\partial u_{22}}{\partial x}+\frac{\partial u_{22}}{\partial y}\right)\right|_{y=-x}$ и дифференцируя полученное равенство, затем меняя $2x$ на $x-y$, находим

$$\omega_{21}(x-y)=\omega_{22}(x-y)=\sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{x-y-1}{2}\right),\ 0\leq x-y\leq 1. \tag{31}$$

Теперь будем пользоваться условием $u_{21}(x,-x)=u_{22}(x,-x)$. Подставляя (31) в это условие и дифференцируя полученное равенство, затем меняя $2x$ на x, имеем следующее соотношение:

$$\nu_1(x)=\tau_1'(x)-\alpha_1(x),\ 0\leq x\leq 1, \tag{32}$$

где $\alpha_1(x)$ – известная функция.

Теперь, применяя оператор $\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$ к уравнению (18) и переходя в полученном равенстве к пределу при $y\to 0$, получим следующее соотношение:

$$\tau_1'''(x)+\nu_1''(x)-\nu_1'(x)-\mu_1(x)=0. \tag{33}$$

Аналогично, переходя в уравнении (20) ($i=2$; $k=1$) к пределу при $y\to 0$, получим соотношение

$$\tau_1''(x)-\mu_1(x)=\omega_{21}(x) \tag{34}$$

Исключая из (32), (33) и (34) функции $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$, получим уравнение

$$\tau_1'''(x) - \tau_1''(x) = \frac{1}{2}\left[\alpha''{}_1(x) - \alpha'{}_1(x) - \omega_{21}(x)\right].$$

Интегрируя последнее уравнение дважды от 1 до x, получим

$$\tau_1'(x) - \tau_1(x) = \alpha_2(x) + k_1(x-1) + k_2, \tag{35}$$

где $\alpha_2(x)$ – известная функция.

Решая уравнение (35) при условиях $\tau_1(1) = \varphi_1(0)$, $\tau_1'(1) = \varphi_1'(0) + \alpha_1(1)$, $\tau_1''(1) = \varphi_1''(0) + \sqrt{2}\psi_3'(0)$, получим

$$\tau_1(x) = \int\limits_1^x \exp(x-t)\,\alpha_2(t)\,dt + k_1(\exp(x-1) - x) + \tag{36}$$

$$+k_2(\exp(x-1) - 1) + k_3\exp(x-1),$$

где $k_3 = \varphi_1(0)$, $k_2 = \varphi_1'(0) - \varphi_1(0) + \frac{1}{2}\alpha_1(1)$, $k_1 = \sqrt{2}\psi_3'(0) + \varphi_1''(0) - \varphi_1'(0) - \frac{1}{2}[\alpha'{}_1(1) + \alpha_1(1)]$.

Таким образом, мы нашли функцию $u_{21}(x,y)$. Она определяется по формуле (30), а функции $\omega_{21}(x-y)$, $\nu_1(x)$ и $\tau_1(x)$ – по формулам (31), (32), (36) соответственно.

Переходим в область D_{32}. Запишем решение уравнения (21) ($i=3$; $k=2$), удовлетворяющее условиям (10), (11):

$$u_{32}(x,y) = \frac{\tau_2(x+y) + \tau_2(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \nu_2(t)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta \int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \omega_{32}(\xi-\eta)\,d\xi \tag{37}$$

Дифференцируя (37) по x и y и подставляя их в условие $\left(\frac{\partial u_{32}}{\partial x} + \frac{\partial u_{32}}{\partial y}\right)\Big|_{y=-x-1} = \sqrt{2}\psi_3(x)$, затем дифференцируя полученное уравнение и меняя $2x+1$ на $x-y$, получим

$$\omega_{32}(x-y) = \sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{x-y-1}{2}\right),\ -1 \le x-y \le 0 \tag{38}$$

Теперь пользуясь из условия $u_{32}(x,x) = u_{31}(x,x)$ и дифференцируя полученное уравнение и меняя $2x$ на x, получим

$$\nu_2(x) = -\tau_2'(x) + \beta_1(x),\ -1 \le x \le 0, \tag{39}$$

где $\beta_1(x)-$ известная функция.

Теперь переходим в область D_{42}. Переходя в уравнениях (21) ($i=4$; $k=2$) и (21) ($i=3$; $k=2$) к пределу при $y \to 0$, получим уравнения $\tau_2''(x) - \mu_2(x) = \omega_{42}(x)$ и $\tau_2''(x) - \mu_2(x) = \omega_{32}(x)$. Из этих уравнений видно, что $\omega_{42}(x) = \omega_{32}(x)$, $-1 \le x \le 0$, тогда в силу (38) имеем

$$\omega_{42}(x-y) = \sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{x-y-1}{2}\right),\ -1 \le x-y \le 0 \tag{40}$$

Затем запишем решение уравнения (21) ($i=4$; $k=2$), удовлетворяющее условиям (10), (11):

$$u_{42}(x,y) = \frac{\tau_2(x+y) + \tau_2(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \nu_2(t)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^y d\eta \int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \omega_{42}(\xi-\eta)\,d\xi.$$

Подставляя (39) в последнее равенство, имеем

$$u_{42}(x,y)=\tau_2(x-y)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\beta_1(t)\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}d\eta\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\omega_{42}(\xi-\eta)\,d\xi \tag{41}$$

Далее, переходим в область D_{41}. Запишем решение уравнения (21) $(i=4;\ k=1)$, удовлетворяющее условиям (16), (17):

$$u_{41}(x,y)=\frac{\tau_4(y+x)+\tau_4(y-x)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x}\nu_4(t)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}d\eta\int\limits_{y-x+\eta}^{y+x-\eta}\omega_{41}(\eta-\xi)\,d\xi \tag{42}$$

Дифференцируя (41) и (42) по x и y и подставляя полученные равенства в условие $\left.\left(\frac{\partial u_{41}}{\partial x}+\frac{\partial u_{41}}{\partial y}\right)\right|_{y=-x}=\left.\left(\frac{\partial u_{42}}{\partial x}+\frac{\partial u_{42}}{\partial y}\right)\right|_{y=-x}$, затем дифференцируя полученное уравнение и учитывая (40) и меняя $2x$ на $x-y$, находим

$$\omega_{41}(x-y)=\omega_{42}(x-y)=\sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{x-y-1}{2}\right),\ -1\le x-y\le 0. \tag{43}$$

Далее, учитывая условия $u_{41}(x,y)|_{y=-x}=u_{42}(x,y)|_{y=-x}$ и дифференцируя полученное уравнение и затем меняя $-2x$ на y, получим

$$\tau_4'(y)-\nu_4(y)=-2\tau_2'(-y)+\delta_3(y),\ 0\le y\le 1 \tag{44}$$

где $\delta_3(y)$ – известная функция.

Теперь подставляя (42) в (6) и дифференцируя полученное уравнение, затем меняя $2x+1$ на y, имеем

$$\tau_4'(y)+\nu_4(y)=\delta_4(y),\ 0\le y\le 1 \tag{45}$$

где $\delta_4(y)$ – известная функция.

Из (44) и (45) получим

$$\nu_4(y)=\tau_2'(-y)+\frac{1}{2}\left[\delta_4(y)-\delta_3(y)\right],\ 0\le y\le 1, \tag{46}$$

$$\tau_4'(y)=-\tau_2'(-y)+\frac{1}{2}\left[\delta_4(y)+\delta_3(y)\right],\ 0\le y\le 1. \tag{47}$$

Интегрируя (47) с учетом условия $\tau_4(0)=\tau_2(0)$, находим

$$\tau_4(y)=\tau_2(-y)+\frac{1}{2}\int\limits_0^y\left[\delta_4(t)+\delta_3(t)\right]dt,\ 0\le y\le 1 \tag{48}$$

Теперь переходим в область D_1. Переходя в уравнении (19) к пределу при $y\to 0$, затем в полученном уравнении меняя x на $x-y$, получим

$$\omega_{12}(x-y)=\tau_1''(x-y)-\nu_1(x-y),\ 0\le x-y\le 1, \tag{49}$$

где положено $\omega_1(x-y)=\begin{cases}\omega_{11}(x-y), & -1\le x\le 0,\\ \omega_{12}(x-y), & 0\le x\le 1.\end{cases}$

Переходя в уравнениях (21) $(i=4;\, k=1)$ и (19) к пределу при $x\to 0$, получим уравнения $\mu_4(y)-\tau_4''(y)=\omega_{41}(-y)$ и $\mu_4(y)-\tau_4'(y)=\omega_{11}(-y)$. Исключая из этих уравнений функцию $\mu_4(y)$, находим

$$\omega_{11}(-y)=\tau_4''(y)-\tau_4'(y)+\omega_{41}(-y).$$

В этом равенстве меняя $-y$ на $x-y$, получим следующее соотношение:

$$\omega_{11}(x-y)=\tau_4''(y-x)-\tau_4'(y-x)+\omega_{41}(x-y). \tag{50}$$

Дифференцируя (47), находим

$$\tau_4''(y)=\tau_2''(-y)+\frac{1}{2}\left[\delta'_4(y)+\delta'_3(-y)\right],\ 0\le y\le 1. \tag{51}$$

Подставляя (47) и (51) в (50), получим

$$\omega_{11}(x-y)=\tau_2''(x-y)+\tau_2'(x-y)+\gamma_1(x-y) \tag{52}$$

где $\gamma_1(x-y)$ – известная функция.

Теперь запишем решение уравнения (19), удовлетворяющее условиям (2), (7), (16):

$$u_1(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int\limits_0^y\tau_4(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)\,d\eta-\int\limits_0^y\varphi_1(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)\,d\eta+\int\limits_0^1\tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)\,d\xi-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^y d\eta\int\limits_0^\eta\omega_{11}(\xi-\eta)G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi-\int\limits_0^y d\eta\int\limits_\eta^1\omega_{12}(\xi-\eta)G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\right], \tag{53}$$

где функции

$$\left.\begin{matrix}G(x,y;\xi,\eta)\\ N(x,y;\xi,\eta)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\mp\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}$$

являются функциями Грина первой и второй краевых задач для уравнения (17).

Дифференцируя (53) по x и полагая в полученном равенстве $x\to 0$, имеем

$$\nu_4(y)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y\tau'_4(\eta)N(0,y;0,\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y\varphi'_1(\eta)N(0,y;1,\eta)\,d\eta+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1\tau'_1(\xi)N(0,y;\xi,0)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y\omega_{11}(-\eta)N(0,y;0,\eta)\,d\eta-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_0^\eta\omega'_{11}(\xi-\eta)N(0,y;\xi,\eta)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y\omega_{12}(1-\eta)N(0,y;1,\eta)\,d\eta-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_\eta^1\omega'_{12}(\xi-\eta)N(0,y;\xi,\eta)\,d\xi.$$

Дифференцируя это равенство и учитывая (51), (52), после некоторых вычислений имеем

$$\tau_2'''(-y) + \int_0^y K(y,\eta)\,\tau'''_2(-\eta)\,d\eta = g(y), \tag{54}$$

где $K(y,\eta)$, $g(y)$ – известные функии.

Уравнение (54) является уравнением типа Вольтерра второго рода. Решая его, находим функцию $\tau_2'''(-y)$, а следовательно и все неизвестные функции $\tau_2(-y)$, $\nu_2(-y)$, $\tau_4(y)$, $\nu_4(y)$, $\omega_{11}(y)$, $u_{32}(x,y)$, $u_{41}(x,y)$, $u_{42}(x,y)$, $u_1(x,y)$ единственным образом. □

Заключение

В работах [3],[4] был рассмотрен ряд краевых задач для более общего уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в области с одной линией изменения типа.

Список литературы

[1] Мамажонов М., Шерматова Х. М., Мукадасов Х., “Постановка и метод решения некоторых краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2014, № 1(8), 7–13.

[2] М. Мамажонов, Х. Б. Мамадалиева, “Постановка и изучение некоторых краевых задач для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида $\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0$ в пятиугольной области”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2016, № 1(12), 32–40.

[3] Джураев Т. Д., Мамажанов М., “О корректной постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа”, *Дифференциальные уравнения*, **19**:1 (1983), 37–50.

[4] Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М., *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа*, Фан, Ташкент, 1986, 220 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 05.03.16