Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 2(13). С. 28-33. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-13-2-28-33

УДК 517.95

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

З. С. Мадрахимова

Институт математики при Национальном университете Узбекистана, г. Ташкент, 100125, Академгородок, ул. Дурман йули, 29

E-mail: zilolaxonmadrahimova@gmail.com

Настоящая работа посвящена постановке и исследованию краевой задачи типа задачи Геллерстедта для уравнения параболо-гиперболического типа с вырождением типа и порядка внутри области, которая эквивалентным образом сводится к интегральным уравнениям.

Ключевые слова: задача Геллерстедта, уравнение параболо-гиперболического типа, вырождение типа и порядка, интегральные уравнения, интегро-дифференциальный оператор дробного порядка, видоизмененная задача Коши

MSC 65M32

GELLERSTEDT PROBLEM FOR A PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION DEGENERATING TYPE AND ORDER

Z. S. Madrakhimova

Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan, Tashkent, 100125, Academgorodok, Do'rmon yo'li, 29 str.

E-mail: zilolaxonmadrahimova@gmail.com

This paper deals with the formulation and study of boundary value Gellerstedt type problem for parabolic-hyperbolic equation with degeneration of the type and order within the area which equivalently reduced to integral equations.

Key words: Gellerstedta problem, parabolic-equation hyper-parabolic type, type and order of degeneracy, integral equations, integral-differential operator of fractional order, modified Cauchy problem

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} xu_{xx}+\alpha_0 u_x-u_y, \ \ (x;\ y)\in\Omega_0, \\ xu_{xx}+(-x)^n u_{yy}+\alpha_1 u_x, \ \ (x;\ y)\in\Omega_{1j}, \ \left(j=\overline{1,3}\right), \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha_0,\alpha_1,n=const$, причем

$$0<\alpha_0<1, \tag{2}$$

здесь Ω_0 – область ограниченная прямыми ${}_0$: $x=0,\ 0\le y\le 1$, ${}_1$:$0\le x<+\infty,\ y=0$, ${}_2$: $0\le x<+\infty,\ y=1$; Ω_{11} – характеристический треугольник, ограниченный отрезком AE оси y и двумя характеристиками

$$AC_1\colon\ y-\frac{2}{n+1}(-x)^{\dfrac{n+1}{2}}=0,\ EC_1\colon\ y+\frac{2}{n+1}(-x)^{\dfrac{n+1}{2}}=y_0,$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0;\ 0)$ и $E(0;\ y_0)$, пересекающимися в точке $C_1\left(-\left(\frac{n+1}{4}y_0\right)^{\dfrac{2}{n+1}};\ \dfrac{y_0}{2}\right)$, $y_0\in[0;\ 1]$; Ω_{12} – характеристический треугольник, ограниченный отрезком E оси y и двумя характеристиками

$$EC_2\colon\ y-\frac{2}{n+1}(-x)^{\dfrac{n+1}{2}}=y_0,\ BC_2\colon\ y+\frac{2}{n+1}(-x)^{\dfrac{n+1}{2}}=1,$$

уравнения (1), выходящими из точек $E(0;\ y_0)$ и $B(0;\ 1)$, пересекающимися в точке $C_2\left(-\left(\dfrac{n+1}{4}(1-y_0)\right)^{\dfrac{2}{n+1}};\ \dfrac{1+y_0}{2}\right)$; Ω_{13} – характеристический четырехугольник, ограниченный характеристиками EC_1, EC_2 и

$$C_1C\colon\ y-\frac{2}{n+1}(-x)^{\dfrac{n+1}{2}}=0,\ C_2\colon\ y+\frac{2}{n+1}(-x)^{\dfrac{n+1}{2}}=1,$$

уравнения (1), пересекающихся в точках E, C_1, C_2 и $C\left(-\left(\dfrac{n+1}{4}\right)^{\dfrac{2}{n+1}};\ \dfrac{1}{2}\right)$.

Введем обозначения: $\Omega_1=\Omega_{11}\cup\Omega_{12}\cup\Omega_{13}\cup EC_1\cup EC_2$, $I=\{(x,\ y):\ x=0,\ 0<y<1\}$, $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1\cup I$, $I_1=\{(x,\ y):\ x=0,\ 0<y<y_0\}$,$I_2=\{(x,\ y):\ x=0,\ y_0<y<1\}$.

В области Ω изучается следующая задача для уравнения (1).

Задача Γ_1. *Найти функцию $u(x,\ y)$ со следующими свойствами:*

1) $u(x,\ y)$ ограничена для всех $0\le x<+\infty,\ 0\le y\le 1$ и непрерывна вплоть до границы области Ω;

2) $u(x,\ y)\in C^{2,1}_{x,y}(\Omega_0)\cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_{11}\cup\Omega_{12}\cup\Omega_{13})$ удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_0, и Ω_{1j}, $\left(j=\overline{1,3}\right)$;

3) на I выполняется условие склеивания

$$\lim_{x\to-0}(-x)^{\alpha_1}u_x=f(y)\lim_{x\to+0}x^{\alpha_0}u_x+g(y)\,\text{равномерно при}\,0<y<1; \tag{3}$$

4) $u(x,\ y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,\ y)|_{y=0} = \varphi(x), \tag{4}$$

$$u(x,\ y)|_{AC_1} = \psi_1(y), 0 \le y \le \frac{y_0}{2} u(x,\ y)|_{EC_2} = \psi_2(y), y_0 \le y \le \frac{y_0+1}{2}, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, $f(y)$, $g(y)$- заданные функции, причем

$$\varphi(x)\ [0;\ +\infty), \tag{6}$$

$$\psi_1(0) = \varphi(0), \tag{7}$$

$$\psi_2(y) \in C^1\left[y_0;\ \frac{y_0+1}{2}\right] \cap C^3\left(y_0; \frac{y_0+1}{2}\right), \tag{8}$$

$$f(y), g(y) \in C\left(\bar{I}\right) \cap C^2(I), f(y) \ne 0, \forall(0;\ y) \in \bar{I}. \tag{9}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия (2), (6)-(9), то в области Ω существует единственное решение задачи Γ_1.*

Доказательство.

Решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$\lim_{x\to-0} u(x;\ y) = \tau(y), \tag{10}$$

для уравнения (1) в области Ω_1 определяется формулой [1, С. 110-111]

$$u(x,y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau\left(y + \frac{2}{n+1}(-x)^{\frac{n+1}{2}}(2t-1)\right)(t(1-t))^{\beta-1}dt -$$

$$-(-x)^{1-\alpha_1}\gamma_2 \int_0^1 \nu_2\left(y + \frac{2}{n+1}(-x)^{\frac{n+1}{2}}(2t-1)\right)(t(1-t))^{-\beta}dt, \tag{11}$$

где $\gamma_1 = \dfrac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}$, $\gamma_2 = \dfrac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\alpha_1)\Gamma^2(1-\beta)}$, $\beta = \dfrac{n-1+2\alpha_1}{2n+2}$, причем $0 < \beta < \dfrac{1}{2}$.

Удовлетворяя (11) первому условию из (5), имеем

$$\psi_1\left(\frac{y}{2}\right) = \gamma_1 \int_0^1 \tau(ty)(t(1-t))^{\beta-1}dt -$$

$$-\gamma_2\left(\tfrac{n+1}{4}y\right)^{1-2\beta} \int_0^1 \nu_2(ty)(t(1-t))^{-\beta}dt,\ 0 \le y \le y_0.$$

Отсюда, произведя замену $ty = z$ получим:

$$\psi_1\left(\frac{y}{2}\right) = \gamma_1 y^{1-2\beta} \int_0^y \tau(z)(z(y-z))^{\beta-1}dz - \gamma_2\left(\frac{n+1}{4}\right)^{1-2\beta} \int_0^y \nu_2(z)(z(y-z))^{-\beta}dt.$$

В силу определения интегро-дифференциального оператора дробного порядка [1, С. 19] из последнего равенства имеем

$$D_{0y}^{-\beta}\tau(y)\,y^{\beta-1}-\frac{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}{\gamma_1\Gamma(\beta)}\left(\frac{n+1}{4}\right)^{1-2\beta}y^{2\beta-1}D_{0y}^{\beta-1}\nu_2(y)\,y^{-\beta}=$$

$$=\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\beta)}y^{2\beta-1}\psi_1\left(\frac{y}{2}\right). \qquad (12)$$

Применяя оператор D_{0y}^{β} к обеим частям равенства (12) с учетом тождеств

$$D_{0y}^{\beta}y^{2\beta-1}D_{0y}^{\beta-1}y^{-\beta}f(y)=y^{\beta-1}D_{0y}^{2\beta-1}f(y),$$

$$D_{0y}^{\beta}D_{0y}^{-\beta}f(y)=f(y),$$

получим функциональное соотношение между$\tau(y)$ и $\nu_2(y)$ принесенное из области Ω_{11} на I_1

$$\tau(y)=\frac{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}{\gamma_1\Gamma(\beta)}\left(\frac{n+1}{4}\right)^{1-2\beta}D_{0y}^{2\beta-1}\nu_2(y)+$$

$$+\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\beta)}y^{1-\beta}D_{0y}^{\beta}y^{2\beta-1}\psi_1\left(\frac{y}{2}\right). \qquad (13)$$

Точно также удовлетворяя (11) второму условию из (5), имеем

$$\tau(y)=\frac{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}{\gamma_1\Gamma(\beta)}\left(\frac{n+1}{4}\right)^{1-2\beta}D_{y_0y}^{2\beta-1}\nu_2(y)+$$

$$+\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\beta)}(y-y_0)^{1-\beta}D_{y_0y}^{\beta}(y-y_0)^{2\beta-1}\psi_2\left(\frac{y+y_0}{2}\right). \qquad (14)$$

Решение второй краевой задачи для уравнения (1) в области Ω_0, удовлетворяющее условиям (4) и

$$\lim_{x\to+0}x^{\alpha_0}u_x=\nu_1(y), \qquad (15)$$

имеет вид [2]:

$$u(x,y)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}\int\limits_0^y e^{-\frac{x}{y-t}}(y-t)^{-\alpha_0}\nu_1(t)dt+\int\limits_0^\infty E(x,t,y,\alpha_0)\varphi(t)dt, \qquad (16)$$

где

$$E(x,\xi,y-\eta,\alpha_0)=(y-\eta)^{-1}(x\xi)^{\frac{1-\alpha_0}{2}}I_{\alpha_0-1}\left(\frac{2\sqrt{x\xi}}{y-\eta}\right)e^{-\frac{x+\xi}{y-\eta}}\xi^{\alpha_0-1}$$

– фундаментальное решение уравнения (1), $I_\chi(z)$ – модифицированная функция Бесселя [3].

В (16) переходя к пределу при $x\to+0$, с учётом условия 1) задачи $_1$ получим функциональное соотношение между $\tau(y)$ и $\nu_1(y)$ на линии вырождения I, принесенное из области D_1:

$$\tau(y)=-\frac{\Gamma(1-\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_0)}D_{0y}^{\alpha_0-1}\nu_1(y)+F(y), \qquad (17)$$

где

$$F(y)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_0)}y^{-\alpha_0}\int\limits_0^{\infty}t^{\alpha_0-1}e^{-\frac{t}{y}}\varphi(t)dt. \tag{18}$$

В силу (2), (6), с учетом формулы [4, С. 4]:

$$\Gamma(z)=\int\limits_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt\text{из}\left(\mathrm{Re}\ z>0\right),$$

(18) следует, что

$$|F(y)|\leq const. \tag{19}$$

Исключая $\tau(y)$ из соотношений (13), (14) и (17), с учетом (3), (10), (15) получим равенств

$$-\frac{\Gamma(1-\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_0)}D_{0y}^{\alpha_0-1}\nu_1(y)+F(y)=\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\beta)}y^{1-\beta}D_{0y}^{\beta}y^{2\beta-1}\psi_1\left(\frac{y}{2}\right)+$$

$$+\left(\frac{n+1}{4}\right)^{1-2\beta}\frac{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}{\gamma_1\Gamma(\beta)}D_{0y}^{2\beta-1}\left(f(y)\nu_1(y)+g(y)\right),0\leq y\leq y_0, \tag{20}$$

$$-\frac{\Gamma(1-\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_0)}D_{0y}^{\alpha_0-1}\nu_1(y)+F(y)=\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\beta)}(y-y_0)^{1-\beta}D_{y_0y}^{\beta}(y-y_0)^{2\beta-1}\psi_2\left(\frac{y+y_0}{2}\right)+$$

$$+\left(\frac{n+1}{4}\right)^{1-2\beta}\frac{\gamma_2\Gamma(1-\beta)}{\gamma_1\Gamma(\beta)}D_{y_0y}^{2\beta-1}\left(f(y)\nu_1(y)+g(y)\right),y_0\leq y\leq 1. \tag{21}$$

Далее, для нахождения $\nu_1(y)$ рассмотрим следующие случаи.

I. Если $\alpha_0<2\beta$ (т.е. $\alpha_0-1<\frac{2(\alpha_1-1)}{n+1}$), то, применяя операторы $D_{0y}^{1-2\beta}$ и $D_{y_0y}^{1-2\beta}$ к обеим частям равенств (20) и (21) соответственно получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\nu_1(y)+\int\limits_0^{y}K_1(y,\ t)\,\nu_1(t)\,dt=\Phi_1(y), \tag{22}$$

$$\nu_1(y)+\int\limits_0^{y}K_2(y,\ t)\,\nu_1(t)\,dt=\Phi_2(y), \tag{23}$$

где $K_1(y,\ t)=\frac{\mu_1}{f(y)}(y-t)^{2\beta-\alpha_0-1}$, $K_2(y,\ t)=\begin{cases}K_{21}(y,\ t),\ 0\leq t\leq y_0,\\ K_{22}(y,\ t),\ y_0\leq t\leq y,\end{cases}$

$$K_{21}(y,\ t)=\frac{\mu_1}{f(y)}(2\beta-\alpha_0)(y-t)^{-\alpha_0}(y-y_0)^{2\beta-1}\frac{y-y_0}{y-t}F\left(2\beta,\ \alpha_0,\ 2\beta+1;\ \frac{y-y_0}{y-t}\right)+$$

$$+\frac{\mu_1}{f(y)}2\beta(y-y_0)^{2\beta-1}(y_0-t)^{-\alpha_0}\frac{y_0-t}{y-t},$$

$$K_{22}(y,\ t)=\frac{\mu_1}{f(y)}(2\beta-\alpha_0)(y-t)^{2\beta-\alpha_0-1},$$

$$\Phi_1(y) = \frac{\mu_2}{f(y)} D_{0y}^{1-2\beta} F(y) - \frac{\mu_3}{f(y)} D_{0y}^{1-2\beta} y^{1-\beta} D_{0y}^{\beta} y^{2\beta-1} \psi_1\left(\frac{y}{2}\right) - \frac{g(y)}{f(y)},$$

$$\Phi_2(y) = \frac{\mu_2}{f(y)} D_{y_0y}^{1-2\beta} F(y) - \frac{g(y)}{f(y)} -$$

$$-\frac{\mu_3}{f(y)} D_{y_0y}^{1-2\beta} (y-y_0)^{1-2\beta} D_{y_0y}^{\beta} (y-y_0)^{2\beta-1} \psi_2\left(\frac{y+y_0}{2}\right),$$

а μ_j, $(j=1,2,3)$ –постоянные.

Ядра и правые части интегральных уравнений (22) и (23) соответственно допускают оценки

$$|K_1(y,\ t)| \le c_{11}(y-t)^{2\beta-\alpha_0-1}, |\Phi_1(y,\ t)| \le c_{12} y^{2\beta-1}, c_{11},\ c_{12} = const, \tag{24}$$

$$|K_{21}(y,\ t)| \le c_{11}(y_0-t)^{-\alpha_0}(y-y_0)^{2\beta-1}, |K_{22}(y,\ t)| \le c_{22}(y-t)^{2\beta-\alpha_0-1}, \tag{25}$$

$$|\Phi_2(y,\ t)| \le c_{23}(y-y_0)^{2\beta-1},\ c_{2j} = const,\ \left(j=\overline{1,3}\right).$$

В силу оценки (24) и (25) уравнения (22) и (23) соответственно являются интегральными уравнениями Вольтерра второго рода со слабой особенностью. Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра [4], заключаем, что интегральное уравнение (22) однозначно разрешимо в классе $C^2(0,\ y_0)$, причем функция $\nu_1(y)$, может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $y\to 0$, а при $y\to y_0$ ограниченно и его решение дается формулой:

$$\nu_1(y) = \Phi_1(y) - \int_0^y R_1(y,\ t)\,\Phi_1(t)\,dt, \quad 0 \le y \le y_0,$$

где $R_1(y,\ t)$ – резольвента ядра $K_1(y,\ t)$. Точно также решая уравнение (23) получим

$$\nu_1(y) = \Phi_2(y) - \int_0^y R_2(y,\ t)\,\Phi_2(t)\,dt, \quad y_0 \le y \le 1,$$

где $R_2(y,\ t)$ – резольвента ядра $K_2(y,\ t)$. $\nu_1(y) \in C^2(y_0,\ 1)$, причем может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $y\to y_0$, а при $y\to 1$ ограниченно. Следовательно, задача $_1$ при $\alpha_0 < 2\beta$ однозначно разрешима в силу эквивалентности ее интегральным уравнениям Вольтерра второго рода (22) и (23).

Решение задачи $_1$ при $\alpha_0 < 2\beta$ можно восстановить в области Ω_0 как решение второй краевой задачи (16), в Ω_{11} и Ω_{12} – как решение видоизмененной задачи Коши (11), а в Ω_{13} как решение задачи Гурса для уравнения (1) (методом Римана).

II. Аналогично как и вышеизложенным методом доказывается однозначная разрешимость задачи Γ_1 в случае, когда $\alpha_0 > 2\beta$, и $\alpha_0 = 2\beta$. □

Список литературы

[1] Смирнов М. М., *Уравнения смешанного типа*, Наука, М., 1985, 304 с.

[2] Терсенов С. А., *Первая краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с меняющимися направлением времени*, Новосибирск, 1978, 52 с.

[3] Ватсон Г. Н., *Теория Бесселевых функций*. Т. 1, Издательство иностранной литературы, М., 1949, 798 с.

[4] Михлин С. Г., *Лекции по линейными интегральными уравнениям*, Физматгиз, М., 1959, 224 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 01.06.2016