Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 2(13). C. 24-27. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-13-2-24-27

УДК 517.95

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ПОРЯДКА

З.В. Кудаева

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 а

E-mail: Kudaeva_zalina@mail.ru

В работе доказывается единственность решения краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа второго порядка

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, принцип экстремума.

MSC 65N80

ON THE UNIQUNESS OF THE SOLUTION TO THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATION

Z.V. Kudaeva

Institute of Applied Mathematics and Automation 360000, Kabaerdino-Balkariya, Nalchik, Shortanova st., 89 a, Russia

E-mail: Kudaeva_zalina@mail.ru

In this paper the uniquness of the boundary value problem solution for the mixed elliptic-hyperbolic equation of the second order.

Key words: mixed type eqyation, extremum principle.

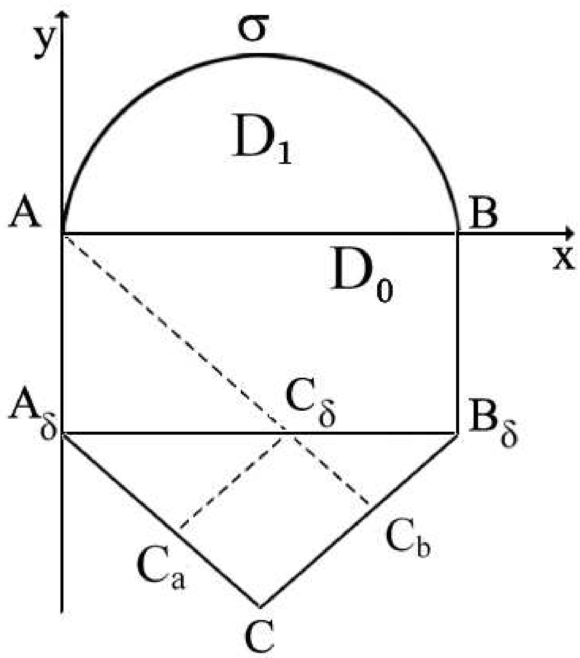
Введение

В работе исследуется единственность решения краевой задачи для линейного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа второго порядка в двумерной полосе.

Значительную роль в становлении современной теории уравнений смешанного типа и ее прикладных аспектов сыграли работы многих авторов, в том числе [1]–[6].

Единственность краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с гиперболическим вырождением порядка

Пусть D – односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная кривой Жордана σ, расположенной в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ с концами в точках $A = (0,0)$ и $B = (1,0)$, отрезками AA_δ, BB_δ прямых $x = 0$, $x = 1$, $-\delta \le y \le 0$, $\delta = \text{const} > 0$ и отрезками $A_\delta C : 0 \le x \le 1/2$ и $B_\delta C : 1/2 \le x \le 1$ прямых $x + y = -\delta$ и $x - y = 1 + \delta$ соответственно (см. рис.).



Рисунок

В области D рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + a_1(z)u_x + b_1(z)u_y + c_1(z)u, & y > 0, \\ u_x - u_y + c_0(z)u, & -\delta < y < 0, \\ u_{xx} - u_{yy} + a_2(z)u_x + b_2(z)u_y + c_2(z)u, & y < -\delta. \end{cases} \quad (1)$$

Через D_1, D_0 и D_2 обозначим части области D, где $y > 0$, $-\delta < y < 0$ и $y < -\delta$ соответственно. Предполагается, что коэффициенты $a_j(z)$, $b_j(z)$, $c_j(z)$ принадлежат классу $C(\overline{D}_j)$, $\overline{D}_j$ – замыкание D_j, $j = 0,1,2$.

Уравнение (1) в области D является уравнением смешанного типа с гиперболическим вырождением порядка в области D_0. Оно относится к уравнениям эллиптического типа в области D_1, и к гиперболическому типу – в области D_2. В области D_0 уравнение (1) имеет одно семейство $\xi = x+y$ действительных характеристик, а в области D_2 – два семейства $\xi = x+y$, $\eta = x-y$.

Цель этого раздела состоит в исследовании однозначной разрешимости следующей смешанной задачи.

Задача. *Найти решение $u(z)=u(x,y)$ уравнения (1), регулярное всюду в области D, за исключением, быть может, характеристических отрезков $AC_b : x+y=0$, $0<x<1/2+\delta/2$, $C_\delta C_a : x-y=2\delta$, $\delta/2<x<\delta$, которое принадлежит классу $C(\overline{D})\cap C'(D\setminus AC_b\setminus C_\delta C_a)$ и удовлетворяет граничным условиям:*

$$u(z)=\varphi(s)\ \forall z\in\sigma \quad 0\le s\le l, \tag{2}$$

$$u(iy)=\psi(y)\ \forall y\in[-\delta,0], \tag{3}$$

где $\varphi(s)$ и $\psi(y)$ – заданные непрерывные функции, l – длина кривой σ, отсчитываемая от точки B.

Теорема. *Пусть $c_1(z)\le 0$ в D_1; $c_0(x)\ge 0$ при $0\le x\le 1$; $\dfrac{\partial a_2(z)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial b_2(z)}{\partial y}$ принадлежат $C(D_2)$. Тогда задача не может иметь более одного решения.*

Доказательство.

Доказательство существенно опирается на следующий принцип экстремума. Пусть $c_1(z)\le 0$ в D_1, $c_0(x)\ge 0$ при $0\le x\le 1$. Тогда положительный максимум (отрицательный минимум) решения $u(z)$ задачи (1)-(3) на компакте $\overline{D}_1$ достигается лишь на σ.

Действительно, пусть $u(z)$ –решение задачи (1)-(3) и $\tau(x)=u(x)$, $\nu(x)=u_y(x)$. Тогда из уравнения

$$u_x-u_y+c_0(z)u=0 \tag{4}$$

заключаем, что

$$\nu(x)=\tau'(x)+c_0(x)\tau(x). \tag{5}$$

Предположим, что $\max\limits_{\overline{D}_1} u(z)=u(\zeta)$. Из принципа Хопфа следует, что $\zeta\overline{\in} D_1$. Допущение, что $\zeta\equiv\xi\in]0,1[$ в силу (5) приводит к неравенству $\nu(\xi)\ge 0$, противоречащему принципу Зарембы-Жиро [1], утверждающему, что $\nu(\xi)<0$. Остается включение $\zeta\in\sigma$.

Докажем теперь, что однородная задача, соответствующая задаче (1)-(3), то есть задача (1)-(3) при $\varphi(z)\equiv 0$, $\psi(y)\equiv 0$, имеет только нулевое решение $u(z)=0$. Итак, пусть $u(z)$ решение однородной задачи. Из принципа экстремума вытекает, что $u(z)\equiv 0$ в замкнутой области $\overline{D}_1$. Далее, функция $u(z)$ должна быть решением однородной задачи Коши: $u(x)=0$, $0\le x\le 1$ для уравнения (4). Из единственности решения этой задачи следует, что $u(z)=0$ в части D_0^+ области D, лежащей в характеристической полосе $0\le x+y\le 1$. В области $D_0^-=D\setminus D_0^+$ $u(z)$ – решение однородной задачи Коши: $u(iy)=0, -\delta\le y\le 0$ для уравнения (4). Поэтому $u(z)=0$ и в D_0^-, и в целом в $\overline{D}_0$. В области D_2 функция $u(z)$ как решение уравнения

$$u_{xx}-u_{yy}+a_2(z)u_x+b_2(z)u_y+c_2(z)=0, \tag{6}$$

должна удовлетворять однородному условию Коши: $u(x-i\delta)=0$ при $0<x<1$ и как следует из уравнения (4) при $y=-\delta$ $u_y(x,-\delta)=0$ при $0<x<1$. Из единственности решения задачи Коши для уравнения (6) приходим к выводу, что $u(z) = 0$ в $\overline{D}_2$. Этим и завершается доказательство единственности решения задачи (1)-(3). $\square$

Список литературы

[1] Бицадзе А. В., *Уравнения смешанного типа*, Из-во АН ССР, М., 1959, 164 с.

[2] Бицадзе А. В., "К проблеме уравнений смешанного типа", *Труды Мат. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова*, **41** (1953), 1-58.

[3] Нахушев А. М., "Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа", *ДАН СССР*, **183**:2 (1968), 261–264.

[4] Нахушев А. М., *Об одном классе линейных краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка*, Эльбрус, Нальчик, 1992, 155 с.

[5] Пулькин С. П., *Избранные труды*, Из-во Универс групп, Самара, 2007, 203 с.

[6] Смирнов М. М., *Уравнения смешанного типа*, Наука, М., 1970, 296 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 20.05.2016