Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 2(13). C. 12-17. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-13-2-12-17

УДК 517.946

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. З. Джамалов

Институт математики при Национальном университете Узбекистана, г. Ташкент, 100125, Академгородок, ул. Дурман йули, 29

E-mail: siroj63@mail.ru

В работе рассматриваются вопросы корректности одной линейной обратной задачи для уравнения Трикоми в трёхмерном пространстве. Для этой задачи методами «ε-регуляризации», Галеркина и последовательностью приближений доказаны теоремы существования и единственности решения в определенном классе.

Ключевые слова: Уравнения Трикоми, линейная обратная задача, корректность решения, метод Галеркина, метод «ε-регуляризации», метод последовательных приближений

MSC 65M32

THE LINEAR INVERSE PROBLEM FOR THE EQUATION OF TRIKOMI IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

S. Z. Djamalov

Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan, Tashkent, 100125, Academgorodok, Do'rmon yo'li, 29 str.

E-mail: siroj63@mail.ru

In the present work the problems of correctness of a linear inverse problem for the Trikomi equation in three-dimensional space are considered. For this problem, the theorems on existence and uniqueness of the solution are proved in certain class by "ε-regularization Galerkin's and of successive approximations methods.

Key words: The Trikomi equations, a linear inverse problem, correctness of solution, Ga-lerkin's method, « ε-regularization» method, method of successive approximations.

Введение

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов. [1,2,5,8]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа (в частности для уравнения Трикоми). [4,6,7]. Частично восполнить данный пробел мы и попытаемся в рамках этой работы.

Постановка задачи

В области

$$Q=(-1,1)\times(0,T)\times(0,\ell)=Q_1\times(0,\ell)=$$
$$=\{(x,t,y);\ -1<x<1,\ 0<t<T<+\infty,\ 0<y<\ell<+\infty\}$$

рассмотрим уравнение Трикоми.

$$Lu=xu_{tt}-\Delta u+\alpha(x,t)\,u_t+c(x,t)\,u=\psi(x,t,y), \tag{1}$$

где $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$ оператор Лапласа в плоскости. Предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции.

Задача 1. *(Нелокальная краевая задача.) Найти обобщенное решение уравнения (1) из пространства С.Л. Соболева, где $W_2^l(Q)$, $2\le l$ - целое число, удовлетворяющее нелокальным краевым условиям*

$$\gamma D_t^p u|_{t=0}=D_t^p u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$\eta D_x^p u|_{x=-1}=D_x^p u|_{x=1}, \tag{3}$$

$$u(x,t,0)=u(x,t,\ell)=0, \tag{4}$$

где $p=0,1,\gamma$ *и* $\eta-const\neq 0$, $D_t^p u=\dfrac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u=u$.

Отметим, что в работе [3] при определенных условиях на коэффициенты уравнения и правую часть уравнения (1) была доказана корректность решения задачи (2)-(4) из пространства С.Л.Соболева $W_2^l(Q)$, когда $2\le l$ - целое число.

В данной работе при дополнительном условии решение уравнения (1) ищется в определенных классах - как само решение, так и правая часть уравнения.

Пусть $\psi(x,t,y)=g(x,t,y)+h(x,t)\cdot f(x,t,y)$ где $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ - заданные функции.

Задача 2. *(Линейная обратная задача.) Найти функции $(u(x,t,y),\,h(x,t))$ удовлетворяющие уравнению (1) в области Q, такие что, функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет краевым условиям (2),(3),(4) и дополнительному условию*

$$u(x,t,\ell_0)=\phi(x,t), 0<\ell_0<\ell<+\infty, \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть $2\alpha+\lambda x\ge\delta_1>0$; $c(x,0)=c(x,T)$; $\alpha(x,0)=\alpha(x,T)$, $\lambda c-c_t\ge\delta_2>0$, где $\lambda=\frac{2}{T}\ln\gamma$ такое, что $\gamma\in(1,\infty)$.*

Пусть далее

$$(1+D_y^3)g \in W_2^1(Q), \gamma g(x,0,y) = g(x,T,y),$$
$$g(x,t,\ell_0) = g_0(x,t) \in W_2^1(Q_1),$$
$$(1+D_y^3)f \in W_2^2(Q), \gamma f(x,0,y) = f(x,T,y),$$
$$f(x,t,\ell_0) = f_0(x,t) \in W_2^2(Q_1), |f_0(x,t)| \geq \tau > 0.$$

Предположим, что заданная функция $\phi(x,t) \in W_2^2(Q_1)$ *является решением следующей задачи*

$$L_0\phi = x\phi_{tt} - \phi_{xx} + \alpha(x,t)\phi_t + c(x,t)\phi = g_0(x,t),$$

$$\gamma D_t^p \phi|_{t=0} = D_t^p \phi|_{t=T},$$
$$\eta D_x^p \phi|_{x=-1} = D_x^p \phi|_{x=1}.$$

однозначная разрешимость, которой изучена в работе [3], и пусть существует положительное число ν *такое, что* $\delta_0 - 6\nu^{-1} \geq \delta_* > 0$, $2\rho \equiv M \cdot \sum\limits_{s=0}^{\infty} (1+\mu_s^6) \| f_s \|^2_{W_2^1(Q_1)} < \delta_*$, *где* $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2, \lambda\}$*;* $M = const(\delta_0; \eta; \nu)$, $\mu_s = \dfrac{s\pi}{l}$.

Тогда функции

$$u(x,t,y) = \sum_{s=0}^{\infty} u_s(x,t)\sin\mu_s y,$$
$$h(x,t) = \frac{1}{f_0}\sum_{s=0}^{\infty} \mu_s^2 u_s(x,t)\sin\mu_s \ell_0$$

являются решением линейной обратной задачи (1)-(5) из класса

$$U = \{(u,h) | \ u \in W_2^2(Q); h \in W_2^2(Q_1); D_y^3\{u_{xx}, u_{tx}, u_{tt}\} \in L_2(Q), D_y^4 u \in L_2(Q)\},$$

где функции $u_s(x,t)$*;* $s = 0,1,2,3,...$ *являются решением в области* Q_1 *соответствующих нелинейных, нагруженных задач [2,5].*

$$Lu_s = L_0 u_s + \mu_s^2 u_s = g_s + \frac{f_s}{f_0} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m^2 u_m \sin\mu_m \ell_0 \equiv F_s(u_s) \tag{6}$$

$$\gamma D_t^p u_s|_{t=0} = D_t^p u_s|_{t=T} \tag{7}$$

$$\eta D_x^p u_s|_{x=-1} = D_x^p u_s|_{x=1} \tag{8}$$

где

$$f_s = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,t,y)\sin\mu_s y dy, g_s = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x,t,y)\sin\mu_s y dy.$$

Доказательство. Докажем теорему 1 поэтапно. Сначала покажем, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет дополнительному условию (5), т.е. $u(x,t,\ell_0) = \phi(x,t)$. Положим противное. Пусть $u(x,t,\ell_0) = v(x,t) \neq \phi(x,t)$, для функции $z(x,t) = v(x,t) - \phi(x,t)$в области Q_1 из (6)-(8) получим

$$L_0 z = xz_{tt} - z_{xx} + \alpha(x,t)z_t + c(x,t)z = 0, \tag{9}$$

$$\gamma D_t^p z|_{t=0} = D_t^p z|_{t=T}, \tag{10}$$

$$\eta D_x^p z|_{x=-1} = D_x^p z|_{x=1}. \tag{11}$$

Из единственности решения задачи (9)-(11) [3] следует $z(x,t)=0$, т.е. $v(x,t)=\phi(x,t)$. В дальнейшем при доказательстве теоремы 1 нам понадобятся следующие обозначения и вспомогательные леммы.

Пусть $u_s \in W_2^2(Q_1)$, тогда определим пространства $W_i(Q_1); i=0,1,2$ с нормой

$$\langle u_s\rangle_i^2 = \sum_{s=0}^{\infty}(1+\mu_s^6)\,\|u_s\|^2_{W_2^i(Q_1)}\,; i=0,1,2,$$

при $i=0$; $W_2^0(Q_1)=L_2(Q_1)$.

Очевидно, что пространства $W_i(Q_1)$ с заданной нормой являются банаховыми [9]. Так как Q_1-ограниченная область с кусочно-гладкой границей, то выполняются следующие вложения

$$W_2(Q_1)\subset W_1(Q_1)\subset W_0(Q_1).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия теоремы 1, тогда существует единственное решение задачи (6)-(8) из пространства $W_2(Q_1)$.*

Доказательство. Сначала докажем разрешимость задачи (6)-(8) методами «ε-регуляризации», последовательных приближений и Галеркина [2,3,9] а именно рассмотрим семейство нелинейных, нагруженных уравнений

$$L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}^{(\theta)} = -\varepsilon\frac{\partial^3}{\partial t^3}u_{s,\varepsilon}^{(\theta)} + L_0\,u_{s,\varepsilon}^{(\theta)} + \mu_s^2\,u_{s,\varepsilon}^{(\theta)} =$$

$$g_s + \frac{f_s}{f_0}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\mu_m^2\,u_{m,\varepsilon}^{(\theta-1)}\sin\mu_m\ell_0 \equiv F_s(u_{s,\varepsilon}^{(\theta-1)}) \tag{12}$$

$$\gamma D_t^p\,u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}\Big|_{t=0} = D_t^p\,u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}\Big|_{t=T}, \tag{13}$$

$$\eta D_x^p\,u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}\Big|_{x=-1} = D_x^p\,u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}\Big|_{x=1}, \tag{14}$$

где $\varepsilon>0,\quad \theta=0,1,2,...;\ \gamma$ и $\eta - consts \neq 0$, такие, что $\gamma\in(1,\infty);\quad \eta\in[1,\infty)$.

Лемма 1. *Пусть выполнены все условия теоремы 2, тогда для решения задачи (12)-(14) справедливы следующие оценки*

$$I)\ \frac{\varepsilon}{\delta_*}\left\langle\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}\right\rangle_0^2 + \left\langle\frac{\partial^2 u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}}{\partial t\,\partial x}\right\rangle_1^2 + \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}\right\rangle_1^2 \le const(\not\theta),$$

$$II)\ \frac{\varepsilon}{\delta_*}\left\langle\frac{\partial^3 u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}}{\partial t^3}\right\rangle_0^2 + \left\langle u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}\right\rangle_2^2 \le const(\not\theta).$$

Символом const ($\not\theta$) здесь и далее обозначим постоянную, независящую от θ.

Доказательство. Применяя методы индукции, Галеркина, априорных оценок, теоремы вложения С.Л. Соболева к тождествам

$$2(L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}^{(\theta)} - F_s(u_{s,\varepsilon}^{(\theta-1)}), \exp(-\lambda t-\mu x)\frac{\partial}{\partial t}u_{s,\varepsilon}^{(\theta)})_0 = 0, \tag{15}$$

$$-2(L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}^{(\theta)} - F_s(u_{s,\varepsilon}^{(\theta-1)}), \exp(\frac{-(\lambda t+\mu x)}{2})\frac{\partial^2 \ell u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}}{\partial t^2})_0 = 0, \tag{16}$$

где $(\cdot,\cdot)_0$ – обычное скалярное произведение в $L_2(Q_1)$, $\Delta w = w_{tt} + w_{xx}$ оператор Лапласа по переменным t и x,, $\mu = \ln\eta, \eta \in [1, +\infty)$

$$\frac{\partial^2 \ell w}{\partial t^2} = \exp(\frac{-(\lambda t + \mu x)}{2}) \left[\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} - \lambda\ w_{tt} + \frac{\lambda^2}{4} w_t\right].$$

после интегрирования получим соответственно первую и вторую оценки. Лемма 1 доказана. □

Введем новую функцию из $W_2(Q_1)$ по формуле $v_{s,\varepsilon}^{(\theta)} = u_{s,\varepsilon}^{(\theta)} - u_{s,\varepsilon}^{(\theta-1)}, \varepsilon > 0, s = 0,1,2,\ldots,\theta = 1,2,3,\ldots.$

Тогда для нее справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 2 и леммы 1. Тогда для функции* $\left\{v_{s,\varepsilon}^{(\theta)}\right\} \in W_2(Q_1)$ *справедливы следующие оценки.*

$$III)\ \frac{\varepsilon}{\delta_*}(\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{s,\varepsilon}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 + \left\langle \frac{\partial^2 u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}}{\partial t \partial x} \right\rangle_0^2) + \left\langle v_{s,\varepsilon}^{(\theta)} \right\rangle_1^2 \leq \left(\frac{\rho}{\delta_*}\right)^{(\theta)} const(\not\theta),$$

$$IV)\ \frac{\varepsilon}{\delta_*} \left\langle \frac{\partial^3 v_{s,\varepsilon}^{(\theta)}}{\partial t^3} v_{s,\varepsilon}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 + \left\langle v_{s,\varepsilon}^{(\theta)} \right\rangle_2^2 \leq \left(\frac{\rho}{\delta_*}\right)^{(\theta)} const(\not\theta).$$

Доказательство. Так как для функции $\left\{u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}\right\} \in W_2(Q_1)$ справедливы оценки I),II), то, повторяя рассуждения леммы 1, получим утверждение леммы 2. □

Лемма 3. *Пусть выполнены все утверждения теоремы 2 и леммы 1 и 2. Тогда задача (12)-(14) однозначно разрешима в* $W_2(Q_1)$, *такое, что* $\varepsilon \cdot \frac{\partial^3 u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}}{\partial t^3} \in W_0(Q_1)$.

Доказательство. Лемму 3 докажем методом сжимающих отображений [9]. Определим в пространстве $W_2(Q_1)$ оператор.

$$u_{s,\varepsilon}^{(\theta)} = L_\varepsilon^{-1} F_s(u_{s,\varepsilon}^{(\theta-1)}) \equiv P u_{s,\varepsilon}^{(\theta-1)}.$$

1. Покажем, что оператор P отображает пространства $W_2(Q_1)$ в себя.

Пусть $\left\{u_{s,\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\} \in W_2(Q_1)$, тогда для решения задачи (12)-(14), справедливо утверждение леммы 1, т.е. справедлива оценка II). Отсюда следует, что для любых $\theta = 1,2,3...$получим $\left\{u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}\right\} \in W_2(Q_1)$. Таким образом $P : W_2(Q_1) \to W_2(Q_1)$

2. Покажем, что P-сжимающий оператор.

Пусть $\left\{u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}\},\{u_{s,\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\} \in W_2(Q_1)$. Рассмотрим новую функцию $v_{s,\varepsilon}^{(\theta)} = u_{s,\varepsilon}^{(\theta)} - u_{s,\varepsilon}^{(\theta-1)}$, для нее справедливо утверждение леммы 2, т.е. справедлива оценка IV),т.е.

$$\frac{\varepsilon}{\delta_*} \left\langle \frac{\partial^3}{\partial t^3} v_{s,\varepsilon}^{(\theta)} \right\rangle_0^2 + \left\langle v_{s,\varepsilon}^{(\theta)} \right\rangle_2^2 \leq \left(\frac{\rho}{\delta_*}\right)^{(\theta)} const(\not\theta).$$

Таким образом P-сжимающий оператор, по известному принципу сжимающих отображений [9], задача (12)-(14) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $W_2(Q_1)$, такое, что $\varepsilon \cdot \frac{\partial^3 u_{s,\varepsilon}^{(\theta)}}{\partial t^3} \in W_0(Q_1)$ при $\varepsilon > 0$. □

Теперь докажем теорему 2.

Пусть $\{u_{s,\varepsilon}\} \in W_2(Q_1)$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ есть единственное решение задачи (12)-(14). Тогда при $\varepsilon > 0$ для любого $s = 0,1,2,3...$ справедливо неравенство IV). По теореме о слабой компактности [9,10], из ограниченной последовательности $\{u_{s,\varepsilon}\}$ можно извлечь слабо сходящуюся под последовательность функции $\{u_{s,\varepsilon_j}\}$, такую что $u_{s,\varepsilon_j} \to u_s$ слабо в $W_2(Q_1)$. Покажем, что предельная функция $u_s(x,t)$ удовлетворяет уравнению (6) почти всюду в $W_2(Q_1)$. Действительно, так как под последовательность $\{u_{s,\varepsilon_j}\}$ слабо сходится в $W_2(Q_1)$, а оператор линеен, то при фиксированном s имеем

$$Lu_s - F_s = \varepsilon_j \frac{\partial^3 u_{s,\varepsilon_j}}{\partial t^3} + L_0(u_{s,\varepsilon_j} - u_s). \tag{17}$$

Переходя к пределу в (17) при $\varepsilon_j \to 0$, получим $Lu_s = F_s$. При фиксированном s функция $u_s(x,t)$ будет единственным решением задачи (6)-(8) из $W_2(Q_1)$.

Тем самым доказано теорема 2. □

Теперь докажем теорему 1. Так как выполнены все условие теоремы 1,2 используя равенства Парсеваля-Стеклова [9,10] для решения задачи (6)-(8) получим решение задачи (1)-(5) из указанного класса U. □

Список литературы

[1] Аниконов Ю. Е., *Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений*, Наука, Новосибирск, 1978, 120 с.

[2] Бубнов Б. А., *К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для параболических и гиперболических уравнений*, Препринты №713, №714, ВЦ.СО АН СССР, Новосибирск, 1987.

[3] Джамалов С. З., "О корректности некоторых нелокальных краевых задач для уравнения смешанного типа первого рода", *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*, Новосибирск, 1989, 112–114.

[4] Джамалов С. З., "Об одной линейной обратной задаче для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в трехмерном пространстве", *Узбекский математический журнал*, 2014, № 4, 29–35.

[5] Кожанов А. И., "Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи", *Журн. вычислит. математики и мат. физики*, **44**:4 (2004), 694–716.

[6] Сабитов К. Б, Сафин Э. М., "Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области", *Доклады РАН*, **429**:4 (2009), 451–454.

[7] Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В., "Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа", *Изв. вузов. Математика*, 2011, № 2, 71–85.

[8] Лаврентьев М. М, Романов В. Г, Васильев В. Г., *Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений*, Наука, Новосибирск, 1969, 67 с.

[9] Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973, 407 с.

[10] Треногин В. А., *Функциональный анализ*, Наука, М., 494 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 12.05.2016