Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 2(13). С. 7-11. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-13-2-7-11

МАТЕМАТИКА

УДК 517.91

ОБ АСИМПТОТИКЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ *

Л. Х. Гадзова

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: macaneeva@mail.ru

Исследован вопрос об асимптотике фундаментального решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами при больших значениях спектрального параметра λ.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, оператор дробного дифференцирования, производная Капуто, фундаментальное решение

MATHEMATICS

MSC 34L99

ON THE ASYMPTOTICS FOR THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE ORDINARY FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS

L. Kh. Gadzova

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia

E-mail: macaneeva@mail.ru

The asymptotics of the fundamental solution of the linear ordinary differential equation of fractional order with constant coefficients, for large values of spectral parameter λ, is found.

Key words: asymptotic expansion, operator of fractional differentiation, derivative of Caputo, fundamental solution

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 16-01-00462-А

В интервале $0 < x < 1$ рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\alpha_j \in]1,2[$, $\lambda, \beta_j \in \mathbb{R}, \beta_1 > 0$, $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_m$, $\partial_{0x}^{\gamma} u(x)$ – регуляризованная дробная производная (производная Капуто) [1, с. 11]:

$$\partial_{0x}^{\gamma} u(x) = D_{0x}^{\gamma - n} u^{(n)}(x), \quad n-1 < \gamma \leq n,$$

где D_{0x}^{γ}– оператор дробного интегро-дифференцирования порядка γ в смысле Римана-Лиувилля [1, с. 9] по переменной x, определяемый равенством:

$$D_{sx}^{\gamma} u(x) = \begin{cases} \frac{sign(x-s)}{\Gamma(-\gamma)} \int\limits_{s}^{x} \frac{g(\xi)}{|x-\xi|^{\gamma+1}} d\xi, & \gamma < 0, \\ g(x), & \gamma = 0, \\ sign^n(x-s) \frac{d^n}{dx^n} D_{sx}^{\gamma-n} u(t), & n-1 < \gamma \leq n, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами исследовались в работах [1]-[6]. Относительно изложения результатов и библиографии работ, связанных с линейными дифференциальными уравнениями дробного порядка, укажем работы [7] и [8]. В настоящее время актуальной темой являются операторы дискретно распределенного порядка, одним из таких операторов является оператор $\sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j \partial_{0x}^{\alpha_j} u(x)$. Дифференциальные уравнения с распределенными операторами исследовались в работах [9], [10] и [11] (см. так же библиографию там). В работах [12] и [13] для уравнения (1) решены задачи Дирихле и Неймана для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами, а в работах [14] и [15] построена функция Грина, исследован вопрос о вещественных собственных значениях. В данной работе строится асимптотическая формула для фундаментального решения при больших значениях λ.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения

$$G_m^{\mu}(x) = G_m^{\mu}(x; \nu_1, ..., \nu_m; \gamma_1, ..., \gamma_m) \equiv \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} S_m^{\mu}(x; \nu_1 t, ..., \nu_m t; \gamma_1, ..., \gamma_m) dt,$$

$$\nu_1 = -\frac{\lambda}{\beta_1}, \quad \nu_j = -\frac{\beta_j}{\beta_1}, \quad \gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_j = \alpha_1 - \alpha_j, \quad (j = \overline{2,m})$$

$$S_m^{\mu}(x; z_1, ..., z_m; \gamma_1, ..., \gamma_m) = (h_1 * h_2 * ... * h_m)(x),$$

$(g*h)(x) = \int\limits_{0}^{x} g(x-t)h(t)dt$ - свертка Лапласа функций $g(x)$ и $h(x)$,

$$h_j = h_j(x) \equiv x^{\mu_j - 1} \phi(\gamma_j, \mu_j; z_j x^{\gamma_j}), \phi(a,b;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(ak+b)}$$

– функция Райта [16]; $x>0,\ z_j\in\mathbb{R},\ \gamma_j>0,\ \mu_j>0,\ \mu=\sum\limits_{j=1}^{m}\mu_j$. Воспользовавшись интегральным представлением функции $G_m^{\mu}(x)$ [14], которое справедливо для $\lambda>0$,

$$G_m^{\mu}(x)=\frac{\beta_1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)} e^{xp}\frac{p^{\alpha_1-\mu}}{\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}+\lambda}dp, \tag{2}$$

где $\gamma(r,\omega\pi)=\{z:|z|=r,|\arg z|\le\omega\pi\}\cup\{z:|z|\ge r,\arg z=\pm\omega\pi\},\ 1/2<\omega\le 1$ – контур Ханкеля, направление обхода выбрано в сторону неубывания $\arg z$ [17, c. 12] и разложением [6, c. 134]

$$\frac{1}{\xi-z}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi^{k-1}}{z^k}+\frac{\xi^n}{z^n(\xi-z)},\quad (n\ge 1)$$

получаем

$$G_m^{\mu}(x,\lambda)=\frac{\beta_1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)} e^{xp}p^{\alpha_1-\mu}\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}\right)^{k-1}}{(-\lambda)^k}+\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}\right)^{n}}{(-\lambda)^n\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}+\lambda\right)}\right)dp$$

или

$$G_m^{\mu}(x,\lambda)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_1}{2\pi i(-\lambda)^k}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)} e^{xp}p^{\alpha_1-\mu}\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}\right)^{k-1}dp+$$

$$+\frac{\beta_1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)} e^{xp}p^{\alpha_1-\mu}\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}\right)^{n}}{(-\lambda)^n\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}+\lambda\right)}dp. \tag{3}$$

Обозначим далее последнее слагаемое формулы (3) через $I_n(\lambda)$ и оценим его при больших значениях $\lambda>0$. Учитывая, что $\alpha_1>\alpha_j$, $\alpha_j\in]1,2[$ и $\beta_1>0$ заметим, что для достаточно малого r значение величины $q=-\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}$, где $p\in\gamma(r,\omega\pi)$, лежит левее контура $\gamma(1,\pi(1-\alpha_1\omega))$, поэтому

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}+\lambda\right|=\left|\lambda-q\right|\ge\lambda\sin\pi(1-\alpha_1\omega).$$

Таким образом справедлива оценка

$$\left|I_n(\lambda)\right|\le\frac{\beta_1\left|\lambda\right|^{-1-n}}{2\pi}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}\left|e^{xp}\right|\left|p^{\alpha_1-\mu}\right|\left|\sum_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}\right|^{n}\left|dp\right|,$$

где интеграл справа сходится, то есть

$$\left|G_m^{\mu}(x,\lambda)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_1}{2\pi i\,(-\lambda)^k}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}e^{xp}p^{\alpha_1-\mu}\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}\right)^{k-1}\right|\leq$$

$$\leq\frac{\beta_1\left|\lambda\right|^{-1-n}}{2\pi}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}\left|e^{xp}\right|\left|p^{\alpha_1-\mu}\right|\left|\sum_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}\right|^{n}\left|dp\right| \qquad (4)$$

Используя обобщенную формулу бинома Ньютона [18, с. 297]

$$(a_1+a_2+...+a_k)^n=\sum_{n_1+n_2+...+n_k=n}\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}a_1^{n_1}a_2^{n_2}...a_k^{n_k}$$

распишем сумму

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_1}{(-\lambda)^k}\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}\right)^{k-1}=$$

$$=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\beta_1}{(-\lambda)^{l+1}}\left(\sum_{l_1+l_2+...+l_m=l}\frac{l!}{l_1!l_2!...l_m!}\left(\beta_1p^{\alpha_1}\right)^{l_1}\left(\beta_2p^{\alpha_2}\right)^{l_2}...\left(\beta_mp^{\alpha_m}\right)^{l_m}\right).$$

Тогда получаем из равенства (4)

$$\left|G_m^{\mu}(x,\lambda)+\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\beta_1}{2\pi i(-\lambda)^{l+1}}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}e^{xp}p^{\alpha_1-\mu}\left(\sum_{l_1+l_2+...+l_m=l}\frac{l!}{l_1!l_2!...l_m!}\left(\beta_1p^{\alpha_1}\right)^{l_1}...\left(\beta_mp^{\alpha_m}\right)^{l_m}\right)\right|\leq$$

$$\leq\frac{\beta_1\left|\lambda\right|^{-1-n}}{2\pi}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}\left|e^{xp}\right|\left|p^{\alpha_1-\mu}\right|\left|\sum_{j=1}^{m}\beta_j p^{\alpha_j}\right|^{n}\left|dp\right|.$$

Согласно интегральному представлению Ханкеля [6, с. 127]

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}e^{p}p^{-z}dp$$

имеем

$$\sum_{l_1+...+l_m=l}\frac{l!}{l_1!...l_m!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(r,\omega\pi)}e^{xp}p^{\alpha_1-\mu}\prod_{j=1}^{m}{\beta_j}^{l_j}p^{\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_jl_j}=$$

$$=\sum_{l_1+...+l_m=l}\frac{l!}{l_1!...l_m!}\prod_{j=1}^{m}{\beta_j}^{l_j}\frac{x^{\mu-\alpha_1-\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_jl_j-1}}{\Gamma\left(\mu-\alpha_1-\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_jl_j\right)}.$$

Далее введем обозначение

$$Q_l=\sum_{l_1+l_2+...+l_m=l}\frac{l!}{l_1!l_2!...l_m!}\prod_{j=1}^{m}{\beta_j}^{l_j}\frac{x^{\mu-\alpha_1-\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_jl_j-1}}{\Gamma\left(\mu-\alpha_1-\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_jl_j\right)}.$$

В силу оценки (4) и введенного обозначения, запишем асимптотическую формулу в следующем виде

$$G_m^{\mu}(x,\lambda) = -\beta_1 \sum_{l=0}^{n-1} \frac{Q_l}{(-\lambda)^{l+1}} + O\left(\frac{1}{\left|\lambda\right|^{n+1}}\right), \quad 0 < x < 1. \tag{5}$$

Полученный результат запишем в виде теоремы

Теорема. *При $\lambda > 0$ справедлива асимптотическая формула (5).*

Список литературы

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с.

[2] Barrett J. H., "Differential equations of non-integer order", *Canadian J.Math.*, **6**:4 (1954), 529–541.

[3] Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б., "Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка", *Изв. АН Армянской ССР. Матем.*, **3**:1 (1968), 3–28.

[4] Псху А. В., "К теории задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **11**:1 (2009), 61–65.

[5] Псху А. В., "Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка", *Мат. сборник.*, **202**:4 (2011), 111–122.

[6] Джрбашян М. М., *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966, 672 с.

[7] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam, 2006, 204 pp.

[8] Гадзова Л. Х., "Задачи Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами", *Дифференциальные уравнения*, **51**:12 (2015), 1580–1586.

[9] Псху А. В., "Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка", *Матем. моделирование и краев. задачи.*, **часть 3** (2007), 153–156.

[10] Псху А. В., "Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 141–182.

[11] Псху А. В., "Задача Коши для уравнения диффузии с оператором дробного дифференцирования дискретно-распределенного порядка", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **12**:1 (2010), 69–72.

[12] Гадзова Л. Х., "Обобщенная задача Дирихле для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами", *Дифференциальные уравнения*, **50**:1 (2014), 121–125.

[13] Гадзова Л. Х., "К теории краевых задач для дифференциального уравнения дробного порядка с производной Капуто", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **16**:2 (2014), 34–40.

[14] Гадзова Л. Х., "О разрешимости задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:2 (2015), 25–28.

[15] Гадзова Л. Х., "Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **15**:2 (2013), 36–39.

[16] Wright E. M., "On the coefficients of power series having exponential singularities", *J.London Math. Soc.*, **8**:29 (1933), 71–79.

[17] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с.

[18] Выгодский М. Я., *Справочник по элементарной математике*, АСТ: Астрель, М., 2006, 509 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 30.04.2016