

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-14-3-23-28

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 537.84, 537.67

ИНВЕРСИИ В ШЕСТИСТРУЙНОЙ МОДЕЛИ ГЕОДИНАМО

Г. М. Водинчар^{1,2}, Л. К. Фещенко¹

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, п. Паратунка, ул. Мирная, 7

² Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: gvodinchar@ikir.ru

Описывается крупномасштабная модель геодинамо, основанная на гипотезе о 6-струйной конвекции в ядре Земли. В пользу такой гипотезы говорят косвенные данные о неоднородности плотности ядра Земли. Структура конвекции определяется сферической гармоникой Y_4^2 , которая задает основную полоидальную составляющую скорости. Модель учитывает эффект обратного влияния магнитного поля на конвекцию. В модели реализуются устойчивые режимы генерации поля с инверсиями. Скорость конвекции и величина дипольной составляющей магнитного поля согласуются с известными оценками и наблюдениями.

Ключевые слова: геодинамо, земное ядро, инверсии геомагнитного поля.

© Водинчар Г. М., Фещенко Л. К., 2016

MATHEMATICAL MODELING

MSC 76W05, 86A25

REVERSALS IN THE SIX-JET GEODYNAMO MODEL

G. M. Vodinchar^{1,2}, L. K. Feshchenko¹

¹ Institute of Cosmophysics Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Paratunka, Kamchatka region, Mirnaya st., 7

² Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4

E-mail: gvodinchar@ikir.ru

We describe a large-scale geodynamo model based on hypothesis about 6-jet convection in the Earth's core. This hypothesis suggests indirect data of inhomogeneities in the density of the Earth's core. The convection pattern is associated with a spherical harmonic Y_4^2 which defines the basic poloidal component of velocity. The model takes into account the feedback effect of the magnetic field on convection. It was ascertained that the model contains stable regimes of field generation with reversals. The velocity of convection and the dipole component of the magnetic field are similar to the observed ones.

Key words: geodynamo, Earth's core, geomagnetic reversals.

© Vodinchar G. M., Feshchenko L. K., 2016

Введение

Проблема формирования магнитных полей планет обычно решается в рамках теории гидромагнитного динамо [1, 2]. Существующие модели либо воспроизводят МГД-течения с хорошим пространственным разрешением на небольших (по геологическим масштабам) промежутках времени ($\sim 10^4$ лет), либо моделируют длительную эволюцию только крупномасштабных пространственных структур. Для моделей второго типа эти структуры должны изначально задаваться. При этом возникает вопрос о том, какова реальная крупномасштабная структура конвекции.

Авторы настоящей работы на протяжении ряда лет разрабатывают модель геодинамо, управляемую 6-ячейковой конвекцией, в которой полоидальная компонента скорости определяется сферической гармоникой Y_4^2 . Впервые гипотеза о таком характере конвекции была выдвинута в работе [3] на основе анализа расщеплений собственных колебаний Земли. В такой структуре в каждом полушарии расположены по две ячейки и еще две – в экваториальной области. Отметим также, что 6-ячейковая структура возникает в результате прямого численного моделирования конвекции в ядре Земли при некоторых значениях параметров ядра [4]. В этих расчетах в каждом полушарии расположены по три ячейки. Такая структура описывается сферической гармоникой Y_4^3 .

Известным свойством реальных космических динамо-систем является наличие инверсий – смены знака дипольной составляющей поля. При этом большой интерес представляют инверсии не связанные с перестройкой конвекции

В настоящей работе обсуждается вопрос о генерации поля 6-ячейковой структурой, описываемой гармоникой Y_4^2 с учетом турбулентного α -эффекта, и об инверсиях в такой системе.

Вывод уравнений модели

Уравнения геодинамо, учитывающие α -эффект в приближении Буссинеска имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{E}{Pm} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} &= E \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p - 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + Ra Pm T \mathbf{r} + \mathbf{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) (T + T_s) &= \frac{Pm}{Pr} \nabla^2 T, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + R_\alpha \mathbf{rot} (\alpha \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Безразмерными параметрами подобия являются число Экмана E , число Релея Ra , число Прандтля Pr , магнитное число Прандтля Pm и амплитуда α -эффекта R_α . Переменная T обозначает отклонение температуры от равновесного профиля T_s . Мы также считаем, что турбулентность в ядре изотропная и используем скалярную параметризацию α -эффекта в виде $\alpha = a(r) \cos \theta$, где $\max |a(r)| = 1$.

На внутренней r_i и внешней r_o границах жидкого ядра для скорости и температуры принимаются нулевые условия, а для магнитной индукции ставятся условия ограниченности в центре Земли и вакуумные условия вне ядра.

Для полей задачи (1) строятся маломодовые приближения, причем гидродинамическая часть модели формально и по логике построения совпадает с системой

Лоренца для конвекции в плоском слое, но описывает 6-струйную конвекцию. Для этого используется одномодовое приближение скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = u(t)\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ в виде аппроксимации моды Пуанкаре $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ для сферической оболочки. Детали построения этой моды описаны в работе авторов [5]. Для температуры вводим двухмодовое приближение $T(\mathbf{r}, t) = \theta_0(t)T_0(\mathbf{r}) + \theta_1(t)T_1(\mathbf{r})$, в которой $T_0(\mathbf{r})$ согласована с радиальной компонентой скоростной моды, а $T_1(\mathbf{r})$ однородна на сфере.

Для представления магнитного поля мы используем некоторые моды омической диссипации, которые отбираем по описываемой ниже схеме, предложенной в работе [6].

Прежде всего, мы упорядочим моды по возрастанию собственных значений, т.е. по возрастанию скорости диссипации. Получим следующую последовательность, где прямоугольниками выделены дублеты – пары мод с одинаковыми собственными значениями: $\mathbf{P}_{01}^{-1..1}$, $\mathbf{T}_{01}^{-1..1}, \mathbf{P}_{02}^{-2..2}$, $\mathbf{T}_{02}^{-2..2}, \mathbf{P}_{03}^{-3..3}$, $\mathbf{P}_{11}^{-1..1}$, $\mathbf{T}_{03}^{-3..3}, \mathbf{P}_{04}^{-4..4}$, $\mathbf{T}_{11}^{-1..1}, \mathbf{P}_{12}^{-2..2}$, $\mathbf{T}_{04}^{-4..4}, \mathbf{P}_{05}^{-5..5}$, ...

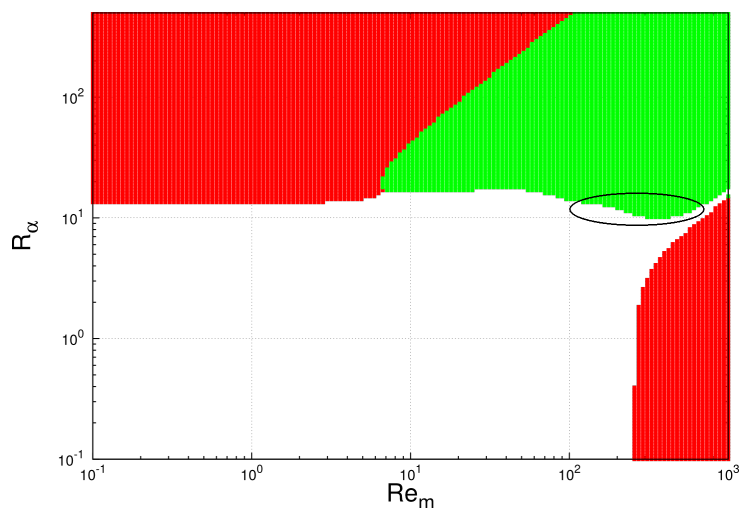


Рис. 1. Области генерации поля. Красные точки – неосциллирующее динамо; зеленые точки – осциллирующее динамо.

Затем, выберем несколько мод с наименьшими собственными значениями, обозначив их $\mathbf{B}_k(\mathbf{r})$.

Далее, запишем магнитное поле в виде $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum_k g_k(t)\mathbf{B}_k(\mathbf{r})$ и подставим это выражение в уравнение индукции (третье из уравнений (1)). Амплитуду скорости $u(t)$ считаем постоянной и равной u_0 . Тогда u_0 можно интерпретировать как магнитное число Рейнольдса Re_m .

На следующем шаге применим к уравнению индукции метод Галеркина и получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dg_k}{dt} &= Re_m \sum_i W_{ki} g_i + P_\alpha \sum_i A_{ki} g_i - \eta_i g_i, \\ W_{ki} &= \int_{r_i \leq r \leq r_o} \mathbf{rot}(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_i) \mathbf{B}_k dV, \\ A_{ki} &= \int_{r_i \leq r \leq r_o} \mathbf{rot}(a(r) \cos \theta \mathbf{B}_i) \mathbf{B}_k dV, \end{aligned} \tag{2}$$

где η_i – это собственное значение для \mathbf{V}_i , а интегралы в формулах для галеркинских коэффициентов W_{ki} и A_{ki} берутся по объему жидкого ядра.

Фактически, мы получим маломодовую аппроксимацию для задачи кинематического динамо с шестью конвективными ячейками. Пусть λ_i обозначает собственное значение матрицы системы (2). Кинематическое динамо генерирует поле, если $\max \Re \lambda_i > 0$. Мода с таким собственным значением является лидирующей, растущей быстрее других. Если собственное значение лидирующей моды комплексное, то магнитное поле будет осциллировать.

Далее, мы будем постепенно наращивать число магнитных мод, пока не получим осциллирующее динамо.

Такова схема отбора магнитных мод.

Разумеется собственные значения зависят от параметров Re_m и R_α , а также от формы $a(r)$ радиального профиля α -эффекта. Мы провели серию расчетов, используя два выражения для профиля $a(r) = 1$ и $a(r) = r$. Оказалось, что результаты отличаются незначительно. В этих расчетах параметры Re_m и R_α равномерно варьировались в логарифмической шкале в диапазоне $[10^{-1}; 10^3]$. После получения осциллирующего динамо мы отбрасывали некоторые моды, если это не меняло качественно результата или не меняло существенно порог генерации.

В результате мы остановились на магнитных модах \mathbf{P}_{01}^0 , $\mathbf{P}_{03}^{\pm 2}$, \mathbf{P}_{11}^0 , $\mathbf{T}_{04}^{\pm 2}$, $\mathbf{P}_{05}^{\pm 2}$.

Области осциллирующего и неосциллирующего динамо на плоскости параметров (Re_m, R_α) показаны на рис. 1 при $a(r) = r$. Случай $a(r) = r$ отличается мелкими деталями.

На этих рисунках видно, что для достаточно больших R_α возможна генерация только за счет α -эффекта, но при этом не происходит генерации дипольной компоненты. В свою очередь, при достаточно больших Re_m возможна генерация поля и без α -эффекта, но при этом не будет инверсий.

В таком кинематическом динамо возможен только неограниченный рост поля. Для получения устойчивой генерации необходимо водить механизм подавления. В связи с этим обратим внимание на область на рис. 1 выделенную эллипсом. Зафиксируем $R_\alpha \sim 15$. Если точка (Re_m, R_α) изменяется вдоль большой оси эллипса, то значение Re_m также варьируется. При этом в крайних положениях динамо не работает. Так можно получить генерацию поля ограниченной величины.

В нашей конструкции Re_m является фиксированным уровнем амплитуды $u(t)$ моды скорости \mathbf{v}_0 . Поэтому мы можем составить теперь комбинированную модель МГД-конвекции с переменной амплитудой скорости. Для ее получения подставим выражения для скорости, температуры и магнитного поля в первые три уравнения (1) и применим метод Галеркина. Получим нелинейную динамическую систему, описывающую 6-ячейковую МГД-конвекция в ядре Земли.

$$\begin{aligned}
 \frac{E}{P_m} \frac{du(t)}{dt} &= -E\mu u(t) + RaP_m S \theta_0(t) + \sum_{i,j} L_{ij} g_i(t) g_j(t), \\
 \frac{d\theta_0(t)}{dt} &= -Fu(t)\theta_1(t) + Hu(t) - \frac{P_m}{Pr} \zeta_0 \theta_0(t), \\
 \frac{d\theta_1(t)}{dt} &= Fu(t)\theta_0(t) - \frac{P_m}{Pr} \zeta_1 \theta_1(t), \\
 \frac{dg_k(t)}{dt} &= u(t) \sum_i W_{ki} g_i(t) + R_\alpha \sum_i A_{ki} g_i(t) - \eta_i g_i(t),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где ζ_i – собственные значения температурной моды T_i , а $\mu > 0$, S , L_{ij} , F , H – галеркинские коэффициенты.

Результаты моделирования

Опишем теперь некоторые результаты вычислительных экспериментов с этой моделью. Мы брали турбулентные значения для диссипативных коэффициентов $\nu = 10^2$ м²/с, $\kappa = 10^{-2}$ м²/с, $\eta = 20$ м²/с [7]. Внешний радиус ядра $r_o = 3480$ км а угловая скорость $\Omega = 7.29 \times 10^{-5}$ рад/с. Соответствующие значения параметров модели: $E = 10^{-7}$, $Pr = 10^4$, $Pm = 5$. Также мы использовали $R_\alpha \sim 15$, следуя оценкам из работы [8] и различные значения числа Релея из диапазона $Ra = 10^2 \div 10^4$.

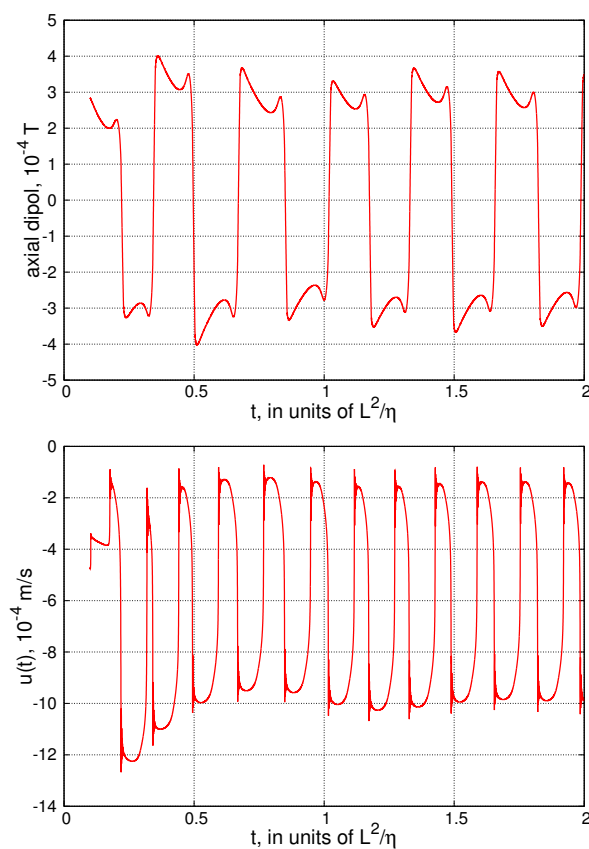


Рис. 2. Амплитуды мод скорости и вертикального диполя для $Ra = 5000$.

Были найдены устойчивые режимы динамо с инверсиями в магнитном поле для $Ra \sim 10^3$. На рис. 2 показаны графики амплитуд скорости и дипольной части магнитного поля для $Ra = 5000$.

На этом рисунке видно, что скорость и магнитное поле осциллируют. Но, если магнитное поле периодически меняет знак, то смены знака скорости не происходит. Таким образом, в модели реализуется режим инверсий без перестройки структуры конвекции.

Разумеется, к конкретным численным значениям, полученным в такой простой модели следует относиться с осторожностью. Тем не менее отметим, что характерное значение скорости на рис. 2 составляет 5×10^{-4} м/с. Это хорошо согласуется

с известными оценками реальной скорости конвекции $\sim 10^{-4}$ м/м [1]. Характерное значение поля в модели 5×10^{-4} Тл также хорошо согласуется с экстраполяцией реальной величины геомагнитного поля на границу ядро-мантия [9]. Временной интервал между инверсиями в модели 3200 лет, что коррелирует со средней величиной интервала полярности для палеомагнитных шкал инверсий [9].

Итак, можно говорить, что численное моделирование показало, что в модели можно реализовать устойчивый режим генерации поля, сопровождающийся инверсиями поля. Важно, что при этом не происходит перестройки структуры конвекции.

Характерные значения скорости и поля в модели совпадают по порядку величины с известными оценками реальных скорости и поля.

Инверсии поля в модели носят регулярный характер, тогда как реальная последовательность инверсий хаотическая. Однако авторам представляется, что получение хаотических инверсий в подобной простой модели в принципе невозможно, без введения шумовых возмущений модели при моделировании.

Список литературы

- [1] C. A. Jones, "Convection-driven geodynamo models", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **358**:1768 (2000), 873–897.
- [2] M. Kono, P. H. Roberts, "Recent Geodynamo simulations and observations of the geomagnetic field", *Reviews of Geophysics*, **40**:4, (2002), 1013.
- [3] В. В. Кузнецов, "Анизотропия свойств внутреннего ядра Земли", *Успехи физических наук*, **167**:9 (1997), 1001–1012; англ. пер.: V. V. Kuznetsov, "The anisotropy of properties of the Earth's inner core", *Physics-Uspekhi*, **40**:9 (1997), 951–961.
- [4] А. В. Гореликов, А. В. Ряховский, "Численное исследование некоторых нестационарных режимов естественной конвекции во вращающемся сферическом слое", *Вычислительная механика сплошной среды*, **5**:2 (2012), 184–192, [A. V. Gorelikov, A. S. Fokin, "Chislennoe issledovanie nekotorykh nestatsionarnykh rezhimov estestvennoy konveksii vo vrashchayushchemsya sfericheskom sloe", *Vychislitel'naya mekhanika sploshnoy sredy I*, **5**:2 (2012), 184–196 (in Russian)].
- [5] G. M. Vodinchar, L. K. Feshchenko, "Model of Geodynamo driven by six-jet convection in the Earth's core", *Magnetohydrodynamics*, **52**:1 (2016), 287–300.
- [6] Д. Д. Соколов, С. Н. Нефедов, "Маломодовое приближение в задаче звездного динамо", *Вычислительные методы и программирование*, **8** (2007), 195–204, [D. D. Sokolov, S. N. Nefedov, "Malomodovoe priblizhenie v zadache zvezdnogo dinamo", *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*, **8**, (2007), 195–204 (in Russian)].
- [7] М. Ю. Решетняк, *Моделирование процессов динамо в геофизике*, дисс. . . . докт. физ.-матем. наук, Москва, 2003, 302 с., [M. Yu. Reshetnyak, "Modelirovaniye protsessov dinamo v geofizike", diss. . . . dokt. fiz.-matem. nauk, Moskva, 2003, 302].
- [8] А. П. Ануфриев, М. Ю. Решетняк, Д. Д. Соколов, "Оценка динамо-числа в модели турбулентного α -эффекта для жидкого ядра Земли", *Геомагнетизм и аэрономия*, **37** (1997), 141–146., [A. P. Anufriev, M. Yu. Reshetnyak, D. D. Sokolov, "Otsenka dinamo-chisla v modeli turbulentnogo α -effekta dlya zhidkogo yadra Zemli", *Geomagnetizm i aeronomiya*, **37**, (1997), 141–146 (in Russian)].
- [9] R. T. Merrill, M. W. McElhinny, P. L. McFadden, *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*, Academic Press, London, 1996.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 16.04.2016