

УДК 517.925.42

ОБ ОДНОЙ ЭРЕДИТАРНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА STICK-SLIP

Р.И. Паровик^{1, 2}

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, п. Паратунка, ул. Мирная, 7

² Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: romanparovik@gmail.com

В работе была предложена математическая модель, которая описывает эффект прилипания скольжения (stick-slip) с учетом эредитарности. Была построена явная конечно-разностная схема для соответствующей задачи Коши. Построены на ее основе осциллограммы и фазовые траектории.

Ключевые слова: эредитарность, stick-slip эффект, осциллограммы, фазовая траектория

© Паровик Р.И., 2016

MSC 37C70

ON A HEREDITARITY VIBRATING SYSTEM WITH ALLOWANCE FOR THE EFFECTS STICK-SLIP

R. I. Parovik^{1, 2}

¹ Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

² Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: romanparovik@gmail.com

The work was a mathematical model that describes the effect of the sliding attachment (stick-slip), taking into account hereditarity. explicit finite-difference scheme for the corresponding Cauchy problem was constructed. Built on the basis of its waveform and phase trajectories.

Key words: hereditarity, stick-slip effect, waveform, phase trajectory

© Parovik R.I., 2016

Введение

Эффект stick-slip (прилипания-скольжения) встречается в задачах трибологии, например когда исследуется движение груза на пружине вдоль поверхности. За счет адгезии груз прилипает к поверхности, а за счет натяжения пружины отрывается и скользит вдоль нее при этом происходят его колебания [1, 2, 3, 4]. Эффект stick-slip может также быть заложен в основу механической модели землетрясения в зоне субдукции литосферных плит [5], а также модели электромагнитных сигналов литосферного происхождения [6].

В этой работе мы будем исследовать нелинейный эредитарный осциллятор, который характеризует эффект stick-slip. Напомним, что в работах [4, 7] мы рассматривали модельное уравнение эффекта stick-slip с учетом эредитарности с производными дробных постоянных порядков [8].

В этой работе мы рассмотрим эредитарный осциллятор stick-slip эффекта с дробными производными переменных порядков, которые являются ограниченными функциями. Причем порядки дробных производных могут зависеть не только от переменной t , но и от самой функции смещения $x(t)$. Введение таким образом дробных управляющих параметров в модельное уравнение, обобщает рассмотренный в третьей главе нелинейный эредитарный осциллятор с учетом stick-slip эффектом, что несомненно может привести к новым свойствам или эффектам в результате математического моделирования.

Далее мы построим явную конечно-разностную схему для численного счета решения обобщенной модели stick-slip эффекта с переменными дробными порядками, как работе [9]. Далее рассмотрим некоторые примеры применения этой схемы с различными значениями управляющих параметров, построим и исследуем фазовые траектории, аналогично работе [10].

Постановка задачи и методика решения

Задача. Найти решение $x(t)$, где $t \in [0, T]$ следующей задачи Коши:

$$\partial_{0t}^{\beta(x(t),t)} x(\tau) + \lambda \partial_{0t}^{\gamma(x(t),t)} x(\tau) + \omega^{\beta(x(t),t)} x(t) = f(x(t), t), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0, \quad (2)$$

где $\partial_{0t}^{\beta(x(t),t)} x(\tau)$ и $\partial_{0t}^{\gamma(x(t),t)} x(\tau)$ — операторы производных Герасимова-Капуто дробных порядков $1 < \beta(x(t), t) < 2, 0 < \gamma(x(t), t) < 1, f(x(t), t) = bt + c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx(t))$, b — скорость перемещения пружины, c — энергия адгезии, λ — коэффициент трения, ω — частота свободных колебаний, $a_n = 2n \int_0^1 \frac{\cos(\pi n \tau)}{\cosh^2(\pi \tau)} d\tau$ — коэффициенты разложения ряда Фурье.

Замечание. Операторы Герасимова-Капуто, входящие в модельное уравнение (1), могут быть записаны, согласно в виде:

$$\partial_{0t}^{\beta(x(t),t)} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2 - \beta(x(t), t))} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\beta(x(t), t) - 1}}, \quad (3)$$

$$\partial_{0t}^{\gamma(x(t),t)} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma(x(t),t))} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\gamma(x(t),t)}}.$$

Поэтому фактически, с учетом представления (3), ставится задача Коши (1).

Замечание. Задача Коши (1) в случае, когда дробные параметры β и γ являются константами, переходит в задачу Коши [4], если эти константы равны $\beta = 2$ и $\gamma = 1$, то приходим к задаче Коши для классического эффекта stick-slip [3].

Задача Коши (1) и (2) в общем случае не имеет явного решения, поэтому мы будем решать эту задачу численно с помощью теории конечно разностных схем [9].

Построим явную конечно-разностную схему, так как ее проще всего реализовать на ЭВМ. Разобьем временной промежуток $[0, T]$ на N равных частей с шагом $\tau = T/N$. Тогда функция решения $x(t)$ дифференциальной задачи Коши (1) и (2) перейдет в сеточную функцию $x(t_j)$, где $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, которая будет являться решением соответствующей разностной задачи Коши.

Остановимся более подробно на аппроксимации операторов дробного дифференцирования (3). Следуя определениям из работы [9], получаем следующие их дискретные аналоги для операторов (3):

$$\partial_{0t}^{\beta(x(t),t)} x(\tau) \approx \frac{\tau^{-\beta(x_j,t_j)}}{\Gamma(3-\beta(x_j,t_j))} \sum_{k=0}^{j-1} p_k^j (x_{j-k-1} - 2x_{j-k} + x_{j-k+1}), \quad (4)$$

$$\partial_{0t}^{\gamma(x(t),t)} x(\tau) \approx \frac{\tau^{-\gamma(x_j,t_j)}}{\Gamma(2-\gamma(x_j,t_j))} \sum_{k=0}^{j-1} q_k^j (x_{j-k-1} - 2x_{j-k} + x_{j-k+1}), \quad (5)$$

$$p_j^k = (k+1)^{2-\beta(x_j,t_j)} - k^{2-\beta(x_j,t_j)}, \quad p_j^k = (k+1)^{1-\gamma(x_j,t_j)} - k^{1-\gamma(x_j,t_j)}.$$

Замечание. В соотношениях (4)-(5) была использована сокращенная запись: $x(t_j) = x_j$.

Исходя из соотношений (4)-(5), которые подставим в уравнение (1) с учетом начальных условий (2), мы получаем явную конечно-разностную схему.

$$x_1 = \tau y_0 + x_0, \quad j = 0,$$

$$x_{j+1} = A_j x_j - B x_{j-1} - B \sum_{k=1}^{j-1} p_k^j (x_{j-k+1} - 2x_{j-k} + x_{j-k-1}) - \quad (6)$$

$$- C \sum_{k=1}^{j-1} q_k^j (x_{j-k+1} - x_{j-k}) - v \sin(x_j) + \xi f_j, \quad j = 1, \dots, N-1,$$

$$A_j = \frac{2A_1 + B_1 - \omega^{\beta(x(t_j),t_j)}}{A_1 + B_1}, \quad B = \frac{A_1}{A_1 + B_1}, \quad C = \frac{B_1}{A_1 + B_1}, \quad v = \frac{\omega^{\beta(x(t_j),t_j)}}{A_1 + B_1},$$

$$\xi = \frac{1}{A_1 + B_1}, \quad A_1 = \frac{\tau^{-\beta(x(t_j),t_j)}}{\Gamma(3-\beta(x(t_j),t_j))}, \quad B_1 = \frac{\lambda \tau^{-\gamma(x(t_j),t_j)}}{\Gamma(2-\gamma(x(t_j),t_j))},$$

Замечание. Заметим, что явная конечно-разностная схема (6) в случае когда дробные параметры являются константами и имеют значения $\beta = 2$ и $\gamma = 1$, переходят в локальные расчетные явные конечно-разностные схемы для классического эффекта stick-slip.

Результаты численного моделирования

В работе [3] было сказано, что для получения достоверного решения достаточно взять первые семь коэффициентов a_k в разложении функции $f(x(t), t)$ (1). Значения этих коэффициентов возьмем из работы [3]: $a_1 = 0.436, a_2 = 0.344, a_3 = 0.164, a_4 = 0.058, a_5 = 0.021, a_6 = 0.004, a_7 = 0.003$.

Проведем численное моделирование эрдитарного эффекта stick-slip по формулам (6) в зависимости от управляющих параметров. Для сравнения результаты расчеты также проведем по схеме, полученной с помощью аппроксимации дробных операторов по правилу трапеций [11] (кривая 2).

ПРИМЕР 1. Управляющие параметр: $\beta(t) = 1.8 - 0.03 \sin(\pi t)$, $\gamma(t) = 0.6 - 0.04 \cos(\pi t)$, $N = 3000$, $\delta = 50$, $\tau = 0.05$, $\lambda = 0.3$, $b = 1$, $\omega = 1$, $y_0 = 0.3$, $x_0 = 0$.

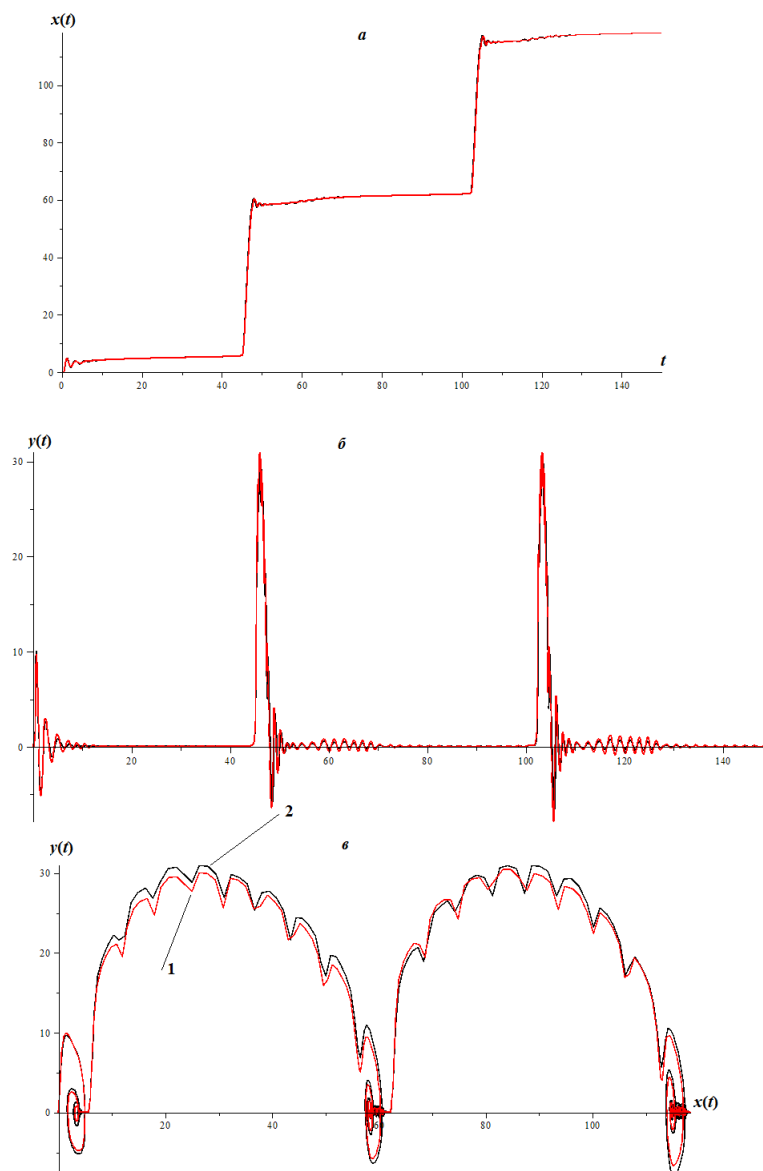


Рис. 1. Расчетные кривые, полученные по формулам (6) (кривая 1) и [11] (кривая 2)
а) - осциллограмма, б) - скорость осциллятора, в) - фазовая траектория

На рис. 1 представлены расчетные кривые смещения, скорости смещения и фазовая траектория. На рис. 1а приведена осциллограмма для примера 1. Видно, что при отрыве груз испытывает колебания, причем скорость таких осцилляций в потенциальной яме затухает достаточно медленно (рис.1б). Этот эффект является эрестарностью процесса. На фазовой траектории (рис.1в) видно, что потенциальные ямы представляют собой устойчивые фокусы.

ПРИМЕР 2. Управляющие параметр: $\beta(t) = 1.6 - 0.1 \sin(\pi t)$, $\gamma(t) = 0.6 - 0.2 \cos(\pi t)$, $N = 3000$, $\tau = 0.05$, $\delta = 50$, $\lambda = 0.3$, $b = 1$, $\omega = 1$, $y_0 = 0.3$, $x_0 = 0$.

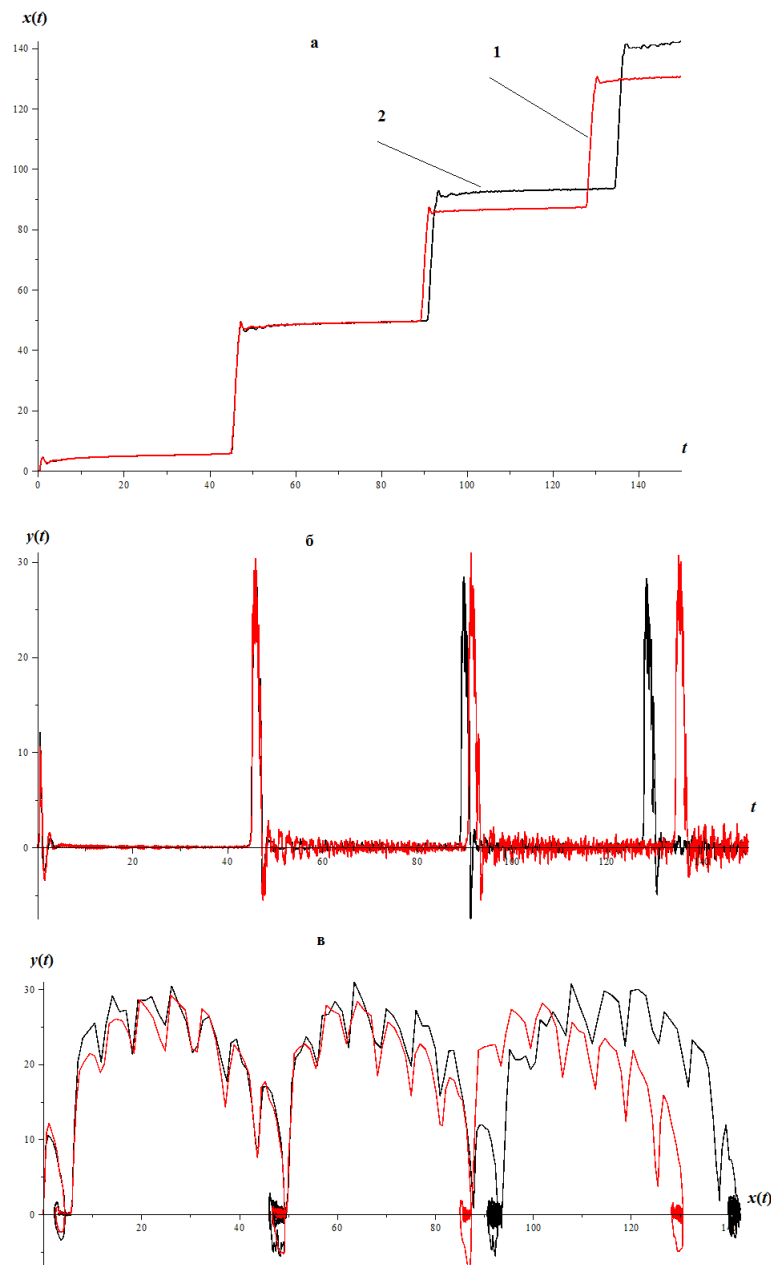


Рис. 2. Расчетные кривые, полученные по формулам (6) и [11] (кривая 2): а) - осциллограмма, б) - скорость осциллятора, в) - фазовая траектория

Необходимо отметить, что численная схема (6) и схема, полученная по методике из работы [11] для первого примера дают одинаковый результат, а для второго

примера результаты несколько отличаются. Это связано с точностью методов, так как схема (6) имеет первый порядок точности, а схема, полученная по методике из работы [11] имеет второй порядок, точности.

Заключение

В этой работе впервые для эредитарного эффекта stick-slip были построены численные схемы. Необходимо дальнейшее исследование этих схем на устойчивость и сходимость.

Список литературы

- [1] Batista A. A., Carlson J. M., “Bifurcations from steady sliding to stick slip in boundary lubrication”, *Physical Review E*, **57**:5 (1998), 4986–4996..
- [2] Daub E.G., Carlson J.M., “Stick-slip instabilities and shear strain localization in amorphous materials”, *Physical Review E*, **80**:6 (2009), 066113.
- [3] Рехвиашвили С.Ш., *Размерные явления в физике конденсированного состояния и нанотехнологиях*, КБНЦ РАН, Нальчик, 2014, 250 с., [Rekhviashvili S. Sh., *Razmernye yavleniya v fizike kondensirovannogo sostoyaniya i nanotekhnologiyakh* (KBNTs RAN, Nal’chik, Russia, 2014) 250 p.].
- [4] Паровик Р.И., “Математическое моделирование эффекта stick-slip с учетом эредитарности”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:3 (2015), 70-77.
- [5] Scholz Ch. H., *The mechanics of earthquakes and faulting*, Cambridge university press, United Kingdom, 2002, 471 pp.
- [6] Уваров В. В., “Методы выделения электромагнитных сигналов литосферного происхождения”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2016, № 3(14), 91-97.
- [7] Parovik R. I., “Mathematical modeling of the stick-slip considering hereditarity”, *Actual problems of applied mathematics and physics, PROCEEDINGS INTERNATIONAL RUSSIAN-CHINESE CONFERENCE* (v. Tegenekli, Kabardino-Balkaria, 14-18 December 2015), KBSC RAS, Nalchik, 2015, 159-160.
- [8] Parovik R. I., “On a credit oscillatory system with the inclusion of stick-slip”, *E3S Web of Con.*, **11** (2016), 00018.
- [9] Parovik R. I., “Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable-order fractional derivatives”, *Archives of control sciences*, **26**:3 (2016), 429-435.
- [10] Parovik R. I., “Fractal parametric oscillator as a model of a nonlinear oscillation system in natural mediums”, *International Journal of Communications, Network and System Sciences*, **6**:3 (2013), 134-138.
- [11] Changpin Li, An Chen, Junjie Ye, “Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation”, *Journal of Computational Physics*, **230** (2011), 3352-3368.

Для цитирования: Паровик Р. И. Об одной эредитарной колебательной системы с учетом эффекта stick-slip // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4(15). С. 30-35. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-15-4-30-35

For citation: Parovik R. I. On a hereditarity vibrating system with allowance for the effects stick-slip, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **15**: 4, 30-35. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-15-4-30-35