

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-15-4-17-23

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 51-73, 537.67

**ИНВЕРСИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОДНОЙ МАЛОМОДОВОЙ МОДЕЛИ
 $\alpha\Omega$ -ДИНАМО**

Г. М. Водинчар^{1,2}, А. Н. Годомская¹, О. В. Шереметьева^{1,2}

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, п. Паратунка, ул. Мирная, 7

² Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: gvodinchar@ikir.ru

Описана маломодовая модель в которой реализуются различные известные режимы космических динамо-систем, в частности, различные режимы инверсий. Источником регулярных инверсий в модели служит ее внутренняя динамика. Нарушение этой цикличности, сбои в работе динамо-машины, выход на режим хаотических инверсий вызываются флуктуациями параметров, которые интерпретируются как результат спонтанного когерентного сложения высших мод. Простота модели позволяет легко модифицировать ее для различных небесных тел.

Ключевые слова: модели динамо, инверсии

© Водинчар Г. М., Годомская А. Н., Шереметьева О. В., 2016

MATHEMATICAL MODELING

MSC 76W05, 86A25

**REVERSALS OF THE MAGNETIC FIELD IN ONE LOW-DIMENSIONAL
 $\alpha\Omega$ -DYNAMO MODEL**

G. M. Vodinchar^{1,2}, A. N. Godomszkaya¹, O. V. Sheremetyeva^{1,2}

¹ Institute of Cosmophysics Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Paratunka, Kamchatka region, Mirnaya st., 7

² Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4

E-mail: gvodinchar@ikir.ru

We describe a low-mode dynamo model. This model implements the various known regimes of cosmic dynamo systems, in particular, the various regimes of reversals. The source of regular reversals in the model is its internal dynamics. Violation of this cyclicity, transition to the chaotic regime of reversals are caused by fluctuations of the parameters, that are interpreted as the result of spontaneous coherent addition of the higher modes. The simplicity of the model allows you to easily modify it for various celestial bodies.

Key words: dynamo models, reversals

© Vodinchar G. M., Godomszkaya A. N., Sheremetyeva O. V., 2016

Введение

Для систем космического динамо (планет, звезд, галактик) обычно рассматривают три механизма $\alpha\Omega$, α^2 и $\alpha^2\Omega$, из которых третий является наиболее общим [1, 2]. Первые два используются когда эффективности α - и Ω -генераторов резко отличаются. В частности, при сильном дифференциальном вращении генерацию магнитного поля описывают с помощью $\alpha\Omega$ -динамо.

Известным свойством динамо систем является наличие инверсий – резкой смены полярности магнитного поля, без существенной перестройки движения проводящей среды. Реальные космические динамо-системы демонстрируют как регулярный характер инверсий, например солнечный цикл, так и крайне хаотичный – Земля. Протяженность различных интервалов времени между инверсиями (интервалов полярности) у геомагнитного поля отличается на несколько порядков [3].

Моделирование инверсий является интенсивно разрабатываемым разделом теории динамо. Их изучение проводится как с использованием прямого численного моделирования, так и на основе упрощенных моделей. Прямое численное моделирование манитогидродинамических уравнений позволяет воспроизвести многочисленные режимы инверсий, но не отвечает на вопрос об их причине. Кроме этого, полные уравнения содержат очень много параметров, оценки которых часто расходятся на много порядков, либо вообще не существуют. Поэтому с помощью простых динамических систем малой размерности пытаются объяснить физическую причину, признаки, важнейшие свойства этого явления, например [4, 5, 6, 7, 8].

В настоящей работе мы моделируем инверсии поля в одной простой модели $\alpha\Omega$ -динамо. Эта трехмодовая модель с флуктуирующими интенсивностями α - и Ω -генераторов. Источник этих флуктуаций можно осмыслить как результат синхронизации высших отброшенных мод скорости и магнитного поля. Такое спонтанное формирование и разрушение когерентных структур хорошо известно в теории турбулентности [9].

Уравнения модели

Рассмотрим сферическую оболочку вязкой проводящей жидкости во вращающейся системе координат. Начало координат совпадает с центром оболочки, а Oz – ось вращения. Будем использовать также сферические координаты (r, θ, φ) . На внутренней r_1 и внешней r_2 границах оболочки скорость нулевая. Такая постановка задачи граничных условий характерна для геодинамо и задается для определенности. Для магнитного поля ставятся вакуумные условия на внешней границе.

Физические параметры оболочки считаем неизменными. Полагаем также, что турбулентность в ядре изотропная, а α -эффект антисимметричен относительно экватора. Поэтому принимаем скалярную параметризацию α -эффекта в следующем виде $\alpha(r, \theta) = \alpha_0 a(r) \cos \theta$, где $\max |a(r)| \sim 1$, а коэффициент $\alpha_0 > 0$ определяет интенсивность α -эффекта. Сейчас мы будем рассматривать задачу кинематического динамо, но далее введем алгебраическое подавление α -эффекта крупномасштабным магнитным полем.

Обезразмеренные уравнения динамо можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{R}_m \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_\alpha \nabla \times (a(r) \cos \theta \mathbf{B}) + \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{R}_m – магнитное число Рейнольдса, а \mathbf{R}_α – амплитуда α -эффекта. Поле скорости \mathbf{v} считается заданным постоянным. Такой вид безразмерных уравнений соответствует выбору радиуса r_2 в качестве пространственного масштаба L , времени магнитной диффузии L^2/ν_m в качестве временного масштаба (ν_m – коэффициент магнитной диффузии) и некоторых характерных единиц скорости U и магнитной индукции B_0 .

В простых вариантах $\alpha\Omega$ -динамо считается, что движение среды – дифференциальное вращение, т. е. поле \mathbf{v} – тороидальное. Однако известно, что в реальности это движение является конвекцией и \mathbf{v} включает полоидальную компоненту. Более того, сферически однородный тепловой поток возбуждает при конвекции лишь полоидальные компоненты, а тороидальные возникают лишь в результате кориолисова сноса.

Поэтому мы задаем поле скорости как линейную комбинацию нескольких мод свободной диссипации жидкости в оболочке. Все такие моды имеют вид $\mathbf{v}_{k,n,m}^T = \nabla \times [R_{kn}^T(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r}]$ (тороидальные) и $\mathbf{v}_{k,n,m}^P = \nabla \times \nabla \times [R_{kn}^P(r) Y_n^m(\theta, \varphi) \mathbf{r}]$ (полоидальные), где индекс k определяет количество слоев конвекции в радиальном направлении. В аксиально симметричном случае $m=0$. Параметры функции $R_{kn}^T(r)$ и $R_{kn}^P(r)$ зависят от величины аспектного отношения r_1/r_2 . Мы использовали в расчетах земное значение 0.35.

Дифференциальному вращению соответствуют моды $\mathbf{v}_{k,1,0}^T$. Они входят в линейную оболочку множества $\{\mathbf{v}_{k_1,1,0}^T, \mathbf{v}_{k_2,2,0}^P, \mathbf{v}_{k_3,3,0}^T, \mathbf{v}_{k_4,4,0}^P, \dots\}$, которая инвариантна относительно кориолисова сноса. Из любой такой моды за счет вращения возбуждаются остальные по цепочке. Тогда, в самом простом случае, полоидальная компонента скорости – это $\mathbf{v}_{0,2,0}^P$. Оказывается, что распределение направления ее кориолисова сноса в объеме оболочки хорошо аппроксимируется комбинацией четырех тороидальных мод: $\mathbf{v}_{0,1,0}^T, \mathbf{v}_{1,1,0}^T, \mathbf{v}_{0,3,0}^T, \mathbf{v}_{1,3,0}^T$. Поэтому, мы задаем скорость как комбинацию этих пяти мод. Коэффициенты выбираем так, чтобы эта комбинация аппроксимировала одну из мод оператора Пуанкаре. Схема расчета таких аппроксимаций описана в [10].

Для представления магнитного поля мы будем использовать некоторые из мод омической диссипации $\mathbf{B}_{k,n,m}^T$ и $\mathbf{B}_{k,n,m}^P$. Их структура подобна описанным выше модам свободной диссипации скорости.

Селекцию магнитных мод произведем по следующей схеме, предложенной в [11].

Пусть магнитное поле представлено линейной комбинацией нескольких мод. Подставим это разложение в уравнение индукции (1) и применим метод Галеркина. Получим систему

$$\frac{dg_k}{dt} = \text{Re}_m \sum_i W_{ki} g_i + \mathbf{R}_\alpha \sum_i A_{ki} g_i - \eta_k g_k, \quad (2)$$

где $g_k(t)$ – амплитуды отобранных мод, а η_k – их собственные значения. Матрицы W и A образованы галеркинскими коэффициентами.

Рассмотрим собственные значения матрицы системы (2). Назовем лидирующим и обозначим λ то из них, которое имеет наибольшую действительную часть. Соответствующую ему моду также назовем лидирующей. Ясно, что динамо работает,

тогда и только тогда, когда $\Re \lambda > 0$. Решения будут осциллирующими, если число λ мнимое.

В соответствии с подходами работы [11] магнитное поле представляется минимальным количеством низших (по собственным значениям) мод, достаточных для получения осциллирующего динамо.

Варьируя параметры Re_m и R_α мы установили, что осциллирующие решения возникают, если ограничиться следующими тремя низшими модами: $\mathbf{B}_{0,1,0}^P$ (диполь), $\mathbf{B}_{0,2,0}^T$ и $\mathbf{B}_{0,3,0}^P$. Далее будем обозначать их \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{B}_3 соответственно.

Разумеется, собственные значения системы (2) зависят и от вида радиальной части α -эффекта $a(r)$. Мы использовали три варианта: $a(r) = 1$, $a(r) = r$, $a(r) = 1/r$.

Отметим, что в работе [11] для получения осциллирующего решения авторам потребовалось 5 магнитных мод для динамо в звезде с тонкой конвективной оболочкой, но они использовали тороидальную скорость типа дифференциального вращения. Скорее всего, меньшее число мод в нашей работе можно объяснить более сложной структурой поля скорости.

На рис. 1 изображены области осциллирующего и неосциллирующего динамо для $a(r) = 1/r$. Другие варианты $a(r)$ дают очень похожие области, поэтому далее мы ограничиваемся только этой зависимостью.

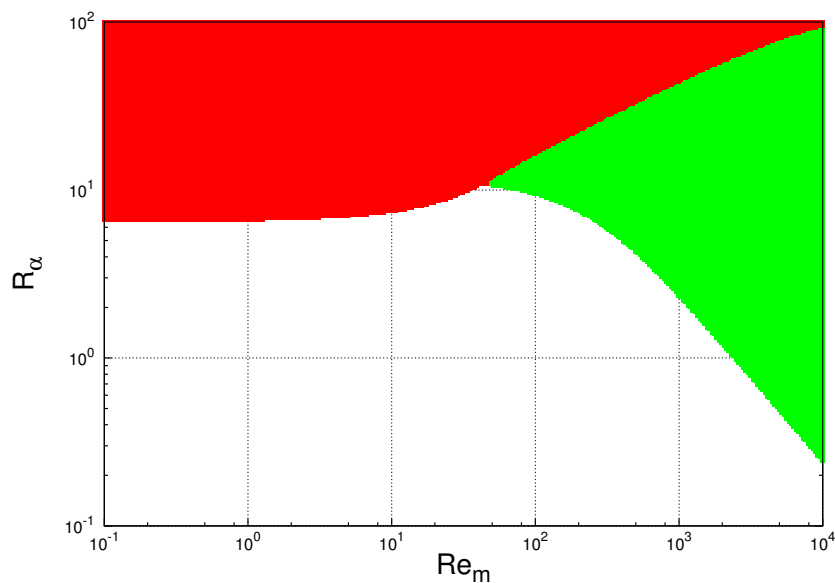


Рис. 1. Области генерации поля. Красные точки – неосциллирующее динамо; зеленые точки – осциллирующее динамо.

Введем теперь в систему (2) механизм алгебраического подавления α -эффекта и осцилляции:

$$\frac{dg_k}{dt} = Re_m(1 + \zeta(t)) \sum_i W_{ki} g_i + \frac{R_\alpha(1 + \xi(t))}{1 + \sum_j g_j^2} \sum_i A_{ki} g_i - \eta_k g_k, \quad (3)$$

где $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ – стохастические процессы с нулевым средним.

Как говорилось выше, эти процессы моделируют спонтанно возникающее и исчезающее когерентное влияние отброшенных высших мод скорости и магнитного поля. Структура процессов следующая.

Зададим на оси времени случайную последовательность точек $0 < \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < \dots < \tau_k < \theta_k < \dots$. Будем считать, что k -ая по счету когерентная структура образуется в момент τ_k и разрушается в момент θ_k . Тогда $T_k^{est} = \tau_k - \theta_{k-1}$ – время ожидания формирования очередной структуры, а $T_k = \theta_k - \tau_k$ – время ее существования. В течение времени ожидания процессы $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ нулевые, а в течение времени существования $\zeta(t) = \zeta_k$ и $\xi(t) = \xi_k$. Здесь ζ_k и ξ_k независимые случайные величины с нулевым средним. Законы распределения этих величин, а также T_k^{est} и T_k выбираются при численном моделировании.

Численное моделирование

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов с моделью (3).

Из рис. 1 видно, что точкой бифуркации в линейном приближении (2) является граничная точка красной, зелёной и белой областей, т. е. $(Re_m, R_\alpha) \approx (49, 11)$.

Сначала мы проводили расчет решений системы (3) при (Re_m, R_α) из окрестности точки (49, 11) и тождественно нулевым $\zeta(t)$ и $\xi(t)$. В нелинейном случае точка бифуркации сместилась в $(Re_m, R_\alpha) \approx (42.15, 5.45)$. Оказалось также, что система сильно чувствительна не только к изменению параметров, но и к начальным условиям.

Поэтому можно было ожидать, что влияние даже малых по интенсивности флуктуаций будет переключать модель между различными режимами динамо.

При моделировании мы использовали показательный закон распределения для времен ожидания и существования T_k^{est} и T_k , причем сами эти величины были независимыми. Средние значения $\langle T_k^{est} \rangle = 5$ и $\langle T_k \rangle = 30$, т. е. время характерное время существования когерентных структур значительно меньше времени их ожидания.

Величины скачков ζ_k и ξ_k были равномерно распределены на отрезках $[-0.01; 0.01]$ и $[-0.1; 0.1]$, соответственно.

Такое сильно различие в выборе дисперсии скачков обусловлено следующими соображениями. α -эффект имеет турбулентную природу, поэтому его отклик на перестройку структуры турбулентности, т. е. ξ_k , может быть значительным. Возникающее в результате в магнитном поле возмущение посредством силы Лоренца изменяет средние крупномасштабные течения. У нас это последнее изменение описывается скачком ζ_k . Поэтому представляется разумным, что интенсивность флуктуаций в турбулентном генераторе должна быть значительно выше, чем в крупномасштабном.

Выбирая различные значения (Re_m, R_α) из малой окрестности точки бифуркации и различные начальные условия, мы получали разнообразные режимы динамо: квазипериодические, динамо-всплески, исчезновение поля с последующим возбуждением, нерегулярные перебросы.

На рис. 2 приведены примеры двух реализаций. По вертикальной оси отложена безразмерная амплитуда дипольной компоненты.

Вверху приводится в основном квазипериодическое решение. Есть лишь отдельные сбои в динамо-цикле. Такое решение похоже на солнечное динамо. Стоит отметить почти полное исчезновение поля при $340 \leq t \leq 370$ и на нескольких более коротких промежутках. Здесь есть определенная аналогия с минимумом Маундера, сбой в работе динамо-машины.

Решение в нижней части рис. 2 характеризуется крайне нерегулярными инверсиями, что типично для геодинамо.

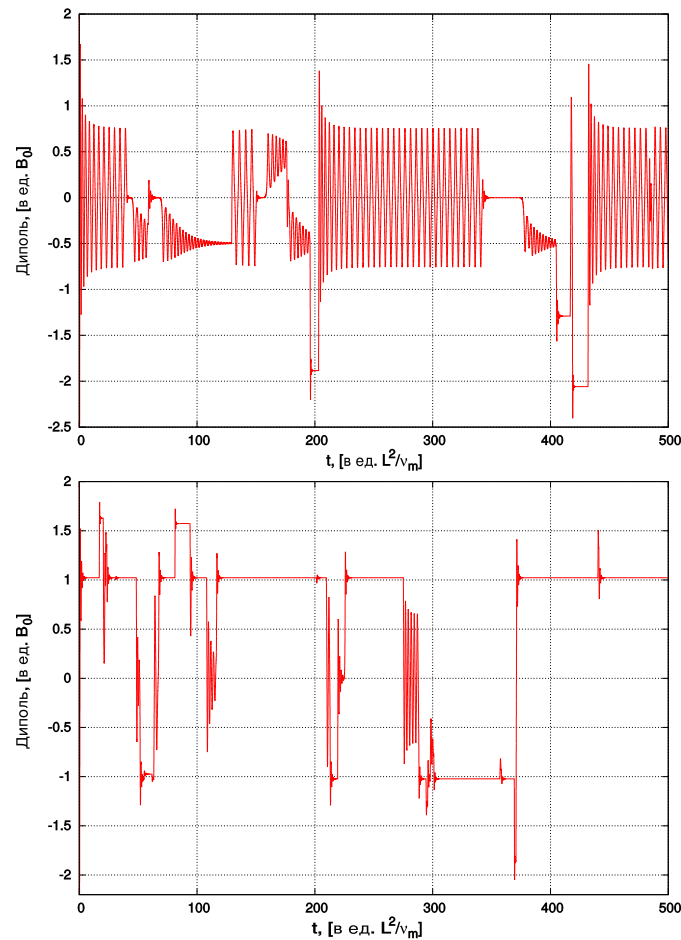


Рис. 2. Режимы изменения амплитуды диполя. Наверху: $(Re_m, R_\alpha) = (42.2, 5.5)$. Внизу: $(Re_m, R_\alpha) = (42.2, 5.7)$.

Итак, в предложенной простой модели динамо при близких значениях управляющих параметров удастся воспроизвести различные режимы динамо, которые наблюдаются в реальных динамо-системах. Разумеется, все такие решения удавалось получать многим авторам и ранее как в результате прямого численного моделирования, так и на простых моделях.

Достоинство предложенной модели в том, что она не связана со строением конкретного небесного тела и не требует знания распределения его физических параметров.

Источником регулярных инверсий в модели служит ее внутренняя динамика, а нарушение этой цикличности, сбой в работе динамо-машины, выход на режим хаотических инверсий обусловлены перестройкой структуры турбулентности.

Заключение

Предложенная в настоящей работе модель позволяет описывать различные известные режимы космических динамо-систем, в частности, различные режимы инверсий.

Простота этой модели позволяет легко модифицировать ее для различных небесных тел. Так, в зависимости от величины аспектного отношения, можно адаптировать ее к планетам земного типа, гигантским планетам, полностью конвективным звездам, звездам с тонкой конвективной оболочкой. При этом будут меняться параметры мод скорости, что, возможно, изменит набор магнитных мод или их количество. Знания физических параметров конкретного небесного тела при этом не требуется.

Большое разнообразие режимов можно обеспечивать также различными распределениями времен T_k^{est} и T_k . Для простоты мы выбирали при моделировании показательное распределение. Однако, известно, что для турбулентности более характерными являются распределения степенного типа. Представляется, что введение степенных распределений даст еще более сложную статистику инверсий, характерных, например, для палеомагнитной шкалы.

Список литературы

- [1] Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д., *Магнитные поля в астрофизике*, РХД, М.–Ижевск, 2006; англ. пер.: Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin, A.A., Sokoloff, D.D., *Magnetic fields in astrophysics*, Gordon and Breach, New York, 1983.
- [2] Krause F., Rädler K.-H., *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*, Academic-Verlag, Berlin, 1980.
- [3] Merrill R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L., *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*, Academic Press, London, 1996.
- [4] Rikitake T., *Electromagnetism and the Earth's interior*, Elsevier, Amsterdam, 1965.
- [5] Ruzmaikin A.A., "The solar cycle as a strange attractor", *Comm. Astrophys.*, **85**:9 (1981).
- [6] Schmitt D., Ossendrijver M. A. J. H., Hooyng P., "Magnetic field reversals and secular variation in a bistable dynamo model", *Phys. Earth Planet. Inter.*, **125**, (2001), 119–124.
- [7] Pétrélis F., Fauve S., Dormy E., Valet J.-P., "Simple Mechanism for Reversals of Earth's Magnetic Field", *Phys. Rev. Lett.*, **102**, (2009), 144503.
- [8] Feshchenko L. K., Vodinchar G. M., "Reversals in the large-scale $\alpha\Omega$ -dynamo with memory", *Nonlin. Processes Geophys.*, **22** (2015), 361–369.
- [9] Колесниченко А.В., Маров М.Я., *Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред.*, БИНОМ, М., 2009, [Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya., *Turbulentnost' i samoorganizatsiya. Problemy modelirovaniya kosmicheskikh i prirodnykh sred.*, BINOM, M., 2009].
- [10] Vodinchar G. M., Feshchenko L. K., "Model of Geodynamo driven by six-jet convection in the Earth's core", *Magnetohydrodynamics*, **52**:1 (2016), 287–300.
- [11] Соколов Д. Д., Неведов С.Н., "Маломодовое приближение в задаче звездного динамо", *Вычислительные методы и программирование*, **8** (2007), 195–204, [Sokolov D. D., Nefedov S. N. "Malomodovoe priblizhenie v zadache zvezdnogo dinamo" , *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*, **8**, (2007), 195–204 (in Russian)].

Для цитирования: Водинчар Г. М., Годомская А. Н., Шереметьева О. В. Инверсии магнитного поля в одной маломодовой модели $\alpha\Omega$ -динамо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4(15). С. 17-23. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-15-4-17-23

For citation: Vodinchar G. M., Godomskaaya A. N., Sheremetyeva O. V. Reversals of the magnetic field in one low-dimensionaal $\alpha\Omega$ -dynamo model, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **15**: 4, 17-23. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-15-4-17-23