Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4(15). C. 12-16. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-15-4-12-16

УДК 517.95

ПРИНЦИП ЭКСТРЕМУМА И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

З. В. Кудаева

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 а

E-mail: Kudaeva_zalina@mail.ru

В работе доказан принцип экстремума и единственность решения задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в области, содержащей две параллельные линии изменения типа.

Ключевые слова: принцип экстремума, задача Дирихле, уравнение Лаврентьева-Бицадзе.

MSC 65N80

EXTREMUM PRINCIPLE AND SOLUTION UNIQUENESS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE LAVRENT'EV-BITSADZE EQUATION WITH TWO PARALLEL LINES OF DEGENERACY

Z. V. Kudaeva

Institute of Applied Mathematics and Automation 360000, Kabaerdino-Balkariya, Nalchik, Shortanova st., 89 a, Russia

E-mail: Kudaeva_zalina@mail.ru

In this paper, we proved extremum principle and the solution uniqueness of the Dirichlet problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation of the second order in the domain comprising two parallel lines of degeneracy.

Key words: extremum principle, Dirichlet problem, the Lavrent'ev-Bitsadze equation.

Введение

В работе исследуется единственность решения краевой задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в области, содержащей две параллельные линии изменения типа.

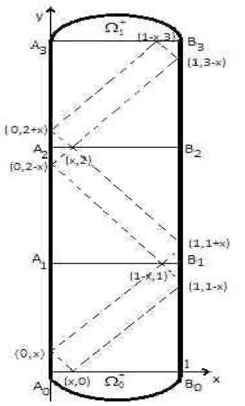
Среди работ, посвященных краевым задачам для уравнения смешанного типа с двумя параллельными линиями вырождения, отметим работы [1]-[4].

Принцип экстремума и единственность решения задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными x, y:

$$\operatorname{sign}(y^2 - ym) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

где $m-$натуральное нечетное число.



Уравнение (1) является уравнением гиперболического типа в полосе $0 < y < m$, эллиптического типа вне этой полосы и параболически вырождается на параллельных линиях $y = 0$, $y = m$, где коэффициент $k(y) = \operatorname{sign}(y^2 - ym)$ при старших производных претерпевает разрыв первого рода.

Пусть Ω – смешанная область (см. рис. при $m = 3$), гиперболическая часть которой совпадает с прямоугольной областью $\Omega^- = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < m\}$, а эллиптическая представляет собой объединение двух односвязных областей Ω_0^+ и Ω_1^+, расположенных в полуплоскости $y < 0$ и $y > m$ соответственно: Ω_0^+ ограничена кривой σ_0 с концами в точках $A_0 = (0,0)$, $B_0 = (1,0)$ и отрезком A_0B_0 прямой $y = 0$; Ω_1^+ ограничена кривой σ_1 с концами в точках $A_m = (0,m)$, $B_m = (1,m)$ и отрезком A_mB_m прямой $y = m$.

Цель данной работы состоит в исследовании единственности решения следующей задачи.

Задача D. *Найти непрерывную в замкнутой области* $\overline{\Omega}$ *функцию* $u = u(x,y)$*, обладающую следующими свойствами:*

1) $u(x,y)$*–регулярное в областях* Ω_0^+, Ω_1^+ *и в области* Ω^- *всюду за исключением, быть может, характеристик* $A_iB_{i+1} : y - x = i,\ B_iA_{i+1} : y + x = i + 1,$ где $i = \overline{0, m-1}$, *решение уравнения (1);*

2) $u(x,y)$ *удовлетворяет условиям сопряжения*

$$\lim_{y \to +0} u_y(x,y) = \lim_{y \to -0} u_y(x,y), \quad 0 < x < 1,$$

$$\lim_{y \to m+0} u_y(x,y) = \lim_{y \to m-0} u_y(x,y), \quad 0 < x < 1,$$

и краевым условиям

$$u|_{\sigma_0} = \varphi_0(x,y), \tag{2}$$

$$u|_{\sigma_1} = \varphi_1(x,y), \tag{3}$$

$$u|_{A_0A_m} = \psi_0(y), \quad 0 \le y \le m, \tag{4}$$

$$u|_{B_0B_m} = \psi_1(y), \quad 0 \le y \le m, \tag{5}$$

где $\varphi_0(x,y)$, $\varphi_1(x,y)$, $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ – *заданные достаточно гладкие функции.*

Задача Дирихле, рассматриваемая в работе для уравнения (1), представляет интерес в связи с тем, что является, по-видимому, наиболее общей для уравнения типа Лаврентьева-Бицадзе с двумя параллельными линиями изменения типа, в которой возможно прямое использование фундаментальных свойств эллиптических и гиперболических функций (принцип А.В. Бицадзе [5], принцип Зарембы для гармонических функций [6], теорема о среднем значении для одномерного волнового уравнения [7]) которое приводит к доказательству единственности решения задачи.

Для уравнения (1) в области Ω справедлив принцип экстремума, который сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $u(x,y)$–решение задачи D при $\psi_0(y) = \psi_1(y) = 0$ для всех $y \in [0,m]$. Тогда положительный максимум (отрицательный минимум) функции $u(x,y)$ на компакте $\overline{\Omega}^+ = \overline{\Omega}_0^+ \cup \overline{\Omega}_1^+$ достигается на $\sigma_0 \cup \sigma_1$.*

Доказательство теоремы проведем при дополнительном предположении, что функция $u_y(x,y)$ является непрерывной в замкнутой области $\overline{\Omega}^-$ всюду, за исключением, быть может, точек $A_0,B_0,A_1,B_1,...,A_m,B_m$, где она может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка.

Поскольку $\psi_0(y)$ и $\psi_1(y)$ равны нулю на сегменте [0,m], то из (4) и (5) имеем:

$$u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad 0 \le y \le m. \tag{6}$$

В области Ω^- функция $u(x,y)$ является решением волнового уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = 0. \tag{7}$$

Воспользуемся теоремой о среднем значении для уравнения (7), которая формулируется следующим образом. *Пусть $z_1 = (x_1,y_1), z_3 = (x_3,y_3)$ и $z_2 = (x_2,y_2), z_4 = (x_4,y_4)$– противоположные вершины произвольным образом фиксированного характеристического четырехугольника $z_1z_2z_3z_4$ принадлежащего замкнутой области $\overline{\Omega}^-$. Тогда ([7, с.165]) для любого решения $u(z) \equiv u(x,y)$ уравнения (7) справедливо равенство*

$$u(z_1) + u(z_3) = u(z_2) + u(z_4).$$

Условие (6) и теорема о среднем значении для уравнения (7) позволяют записать (см. характеристические четырехугольники на рис.):

$$\begin{cases} u(x,0) + u(1-x,1) = 0, \\ u(1-x,1) + u(x,2) = 0, \\ u(x,2) + u(1-x,3) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u(x,m-1) + u(1-x,m) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Из системы (8) следует

$$\tau_0(x)+\tau_1(1-x)=0, \quad 0<x<1, \tag{9}$$

где $\tau_0(x)=u(x,0)$, $\tau_1(x)=u(x,m)$.

Поскольку $u(x,y)$–решение волнового уравнения (7), то $u(x,y)=f(x-y)+g(x+y)$. Отсюда следует, что $u_y(x,y)=-f'(x-y)+g'(x+y)$ является решением уравнения (7) и для $u_y(x,y)$ применима теорема о среднем. Выписав систему аналогичную системе (8), получим из нее

$$u_y(x,0)+u_y(1-x,m)=0,$$

т.е.

$$\nu_0(x)+\nu_1(1-x)=0, \quad 0<x<1, \tag{10}$$

где $\nu_0(x)=u_y(x,0)$, $\nu_1(x)=u_y(x,m)$.

Допустим, что положительный максимум функции $u(x,y)$ на компакте $\overline{\Omega}^+$ достигается в точке $\zeta=(\xi,\eta)$. Функция $u(x,y)$ в областях Ω_0^+ и Ω_1^+ удовлетворяет уравнению Лапласса

$$u_{xx}+u_{yy}=0. \tag{11}$$

Поэтому в силу принципа экстремума для гармонических функций точка ζ не принадлежит Ω_0^+ и Ω_1^+. Допустим, что $\zeta=\zeta_0=(\xi,0), 0<x<1$. Тогда согласно принципу Зарембы [6] для уравнения (11) в точке положительного максимума

$$\nu_0(\xi)>0. \tag{12}$$

В силу (9) и (10) точка (ξ_1,m), где $\xi_1=1-\xi$, представляет собой точку отрицательного минимума функции $u(x,y)$ на компакте $\overline{\Omega_1}^+$, и в этой точке $\tau_1(\xi)=-\tau_0(\xi)<0$. Согласно принципу Зарембы

$$\nu_1(\xi)=-\nu_0(\xi)>0. \tag{13}$$

Неравенство (13) противоречит неравенству (12). Это противоречие результат неверного предположения. Следовательно, $\zeta\neq(\xi,0)$. Очевидно, что $\zeta\neq(\xi,1)$. Аналогично решается вопрос и в случае отрицательного минимума. Таким образом, доказано, что экстремум, достигаемый по теореме Вейерштрасса функцией $u(x,y)$ на компакте $\overline{\Omega}^+$, реализуется в точках, лежащих на $\sigma_0\cup\sigma_1$.

Из теоремы (принципа экстремума) для однородной краевой задачи следует тривиальность решения, т.е. единственность решения задачи Дирихле (2)–(5) для уравнения (1) в области Ω.

Существование решения задачи доказывается методом редукции к сингулярному интегральному уравнению [5].

Случай когда область Ω^- представляет собой квадрат $\Omega^-=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$ был рассмотрен в работе [8].

Список литературы

[1] Нахушев А. М., “Краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения”, *ДАН СССР*, **170**:1 (1966), 38-40, [Nakhushev A. M. Kraevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa s dvumya liniyami vyrozhdeniya. DAN SSSR. 1966. 170:1. 38-40 (in Russian)].

[2] Базарбеков А. Б., "Об одной задаче для уравнения смешанного типа с двумя параллельными линиями вырождения", *Дифференциальные уравнения*, **X**:1 (1974), 18-23, [Bazarbekov A. B. Ob odnoy zadache dlya uravneniya smeshannogo tipa s dvumya parallel'nymi liniyami vyrozhdeniya. Differentsial'nye uravneniya. 1974. X:1. 18-23 (in Russian)].

[3] Sibner L. M., "A boundary problem for an equation of mixed type having two transistions", *J. differenial Equation*, **4** (1968), 634-645.

[4] Rassias J. M., "Extended Bitsadze-Lavrent'ev problem with elliptic arcs in euclidean plane", *Comptes rendys de l'Academie Bulgare des Sci*, **38**:1 (1985), 31-34.

[5] Бицадзе А. В., *Уравнения смешанного типа*, АН СССР, М., 1959, 164 с., [Bitsadze A. V. Uravneniya smeshannogo tipa Moskva. AN SSSR. 1959. 164 (in Russian)].

[6] Заремба С., "Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению Лапласа", *Усп. матем. наук*, 1946, № I, 3-4, [Zaremba S. Ob odnoy smeshannoy zadache, otnosyashcheysya k uravneniyu Laplasa. Usp. matem. nauk. 1946. I. 3-4 (in Russian)].

[7] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высш. шк., М., 1995, 301 с., [Nakhushev A. M. Uravneniya matematicheskoy biologii. Moskva. Vyssh. shk. 1995. 301 (in Russian)].

[8] Кудаева З. В., "Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя параллельными линиями параболического вырождения", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **9**:2 (2007), 39–43, [Kudaeva Z. V. Zadacha Dirikhle dlya uravneniya smeshannogo tipa s dvumya parallel'nymi liniyami parabolicheskogo vyrozhdeniya. Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk. 2007. 9:2. 39–43 (in Russian)].

Для цитирования: Кудаева З. В. Принцип экстремума и единственность решения задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с двумя параллельными линиями изменения типа // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2016. № 4(15). C. 12-16. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-15-4-12-16

For citation: Kudaeva Z. V. Extremum principle and solution uniqueness of the Dirichlet problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation with two parallel lines of degeneracy, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2016, **15**: 4, 12-16. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-15-4-12-16

Поступила в редакцию / Original article submitted: 18.10.2016