Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4(15). C. 7-11. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-15-4-7-11

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БАРРЕТТА В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Р. З. Березгова

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 а

E-mail: kagharova_r@mail.ru

В работе исследована краевая задача для нагруженного дифференциального уравнения дробного порядка с оператором Барретта в главной части.

Ключевые слова: оператор Барретта, уравнение дробного порядка, нагруженное уравнение.

MATHEMATICS

MSC 35M12

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE BARRETT OPERATOR IN THE MAIN PART

R. Z. Berezgova

Institute of Applied Mathematics and Automation 360000, Kabardino-Balkariya, Nalchik, Shortanova st., 89 a, Russia

E-mail: kagharova_r@mail.ru

In this paper, we study the boundary value problem for loaded differential equations of fractional order with the Barrett operator in the main part.

Key words: Barrett operator, differential equations of fractional order, loaded equation.

Введение

Краевым и начальным задачам для нагруженных дифференциальных уравнений с оператором Барретта посвящены работы [1]–[7].

В данной работе исследуется однозначная разрешимость краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения с оператором Барретта в главной части.

Постановка задачи

Рассмотрим следующее нагруженное дифференциальное уравнение порядка α:

$$D_{0t}^{\alpha} u(x,\eta) - \lambda u(x,t) = \sum_{j=1}^{k} a^{j}(x,\eta)\, u\left(x,t_j\right) + \upsilon(x,t), \qquad (1)$$

где D_{0t}^{α} - оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha \in]m-1,m]$, $m=1,2,\dots$ [8, с.28], $\lambda =$const, $a^{j}(x,t)$, $\upsilon(x,t)-$ заданные непрерывные в области $\Omega = \{(x,t) \,:\, 0 < x < r,\ 0<t<T\}$ функции независимых переменных x и t; $t=t_j-$ это фиксированные точки из отрезка $[0,T]$.

Задача 1. *Найти решение $u=u(x,t)$ уравнения (1) из пространства $L(\Omega)$, непрерывное всюду в замыкании $\overline{\Omega}$, за исключением, быть может, отрезка $I_r = \{(x,0):\ 0 \leq x \leq r\}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha-i} u(x,\eta) = \nu_i(x),$$

$$\lim_{t\to T} D_{0t}^{\alpha-m} u(x,\eta) = \mu(x), \quad 0\le x\le r,$$

$$i=\overline{1,m-1};\ \ m-1<\alpha\le m;\ m=2,3,\dots$$

где $\nu_i(x), \mu(x) \in C[0,r]$.

Исследование задачи 1

Цель данной работы состоит в исследовании однозначной разрешимости краевой задачи 1.

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть* $\upsilon(x,t)\in C(\overline{\Omega}\setminus I_r)\cap L(\Omega)$ *и выполняется условие* $\mathrm{E}_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};1) \neq 0$, *где* $\mathrm{E}_{1/\alpha}(z;\mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\mu)}-$ *функция типа Миттаг-Леффлера [8, с. 12]. Тогда любое решение задачи 1 является решением нагруженного функционального уравнения*

$$u(x,t) = U(\nu,\mu,\upsilon,\lambda;x,t) + \sum_{j=1}^{k} A^{j}(x,t)\, u\left(x,t_j\right), \qquad (2)$$

где

$$U(\nu,\mu,\upsilon,\lambda;x,t) = \sum_{i=1}^{m-1} \nu_i(x)\left[t^{\alpha-i}E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};\alpha-i+1)- \right.$$

$$\left. -\frac{t^{\alpha-m}E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};\alpha-m+1)T^{m-i}E_{1/\alpha}[\lambda(T-\eta)^{\alpha};m-i+1]}{E_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};1)}\right]+$$

$$+\frac{\mu(x)t^{\alpha-m}E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};\alpha-m+1)}{E_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};1)}+\Gamma(\alpha)D_{0t}^{-\alpha}\mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda\,(t-\eta)^{\alpha};\alpha\right]\upsilon(x,\eta)-$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha)t^{\alpha-m}E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};\alpha-m+1)D_{0T}^{-m}E_{1/\alpha}[\lambda(T-\eta)^{\alpha};\alpha]\upsilon(x,\eta)}{E_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};1)},$$

$$A^{j}\,(x,t)=\Gamma\,(\alpha)\,D_{0t}^{-\alpha}\mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda\,(t-\eta)^{\alpha};\alpha\right]a^{j}\,(x,\eta)-$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha)t^{\alpha-m}E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};\alpha-m+1)D_{0T}^{-m}E_{1/\alpha}[\lambda(T-\eta)^{\alpha};\alpha]a^{j}(x,\eta)}{E_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};1)}.$$

Доказательство. Из [2, с. 100] известно, что единственное решение задачи Коши в нелокальной постановке

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-i}\,u\,(x,t)=\nu_{i}\,(x)\,,$$

$$i=\overline{1,m};\ \ m-1<\alpha\le m;\ m=1,2,...$$

для уравнения

$$D_{0t}^{\alpha}\,u(x,\,\eta)-\lambda u(x,\,t)=\upsilon(x,\,t)$$

задается формулой

$$u\,(x,t)=\sum_{i=1}^{m}\nu_{i}\,(x)\,t^{\alpha-i}\mathrm{E}_{1/\alpha}\,(\lambda t^{\alpha};\,\alpha-i+1)+\Gamma(\alpha)D_{0t}^{-\alpha}\mathrm{E}_{1/\alpha}[\lambda(t-\eta)^{\alpha};\,\alpha]\upsilon(x,\,\eta). \tag{3}$$

Для уравнения (1) представление (3) запишется в следующем виде:

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{m-1}\nu_{i}(x)t^{\alpha-i}E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};\alpha-i+1)+\nu_{m}(x)t^{\alpha-m}\times$$

$$\times E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};\alpha-m+1)+\Gamma(\alpha)D_{0t}^{-\alpha}E_{1/\alpha}[\lambda(t-\eta)^{\alpha};\alpha]\Big[\sum_{j=1}^{k}a^{j}\,(x,\,\eta)\,u\left(x,\,t_{j}\right)+\upsilon(x,\eta)\Big]. \tag{4}$$

Удовлетворяя (4) второму условию задачи 1 будем иметь

$$\lim_{t\to T}D_{0t}^{\alpha-m}u(x,\eta)=\sum_{i=1}^{m-1}\nu_{i}(x)T^{m-i}E_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};m-i+1)+$$

$$+\nu_{m}(x)E_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};1)+\Gamma(\alpha)D_{0T}^{-m}E_{1/\alpha}[\lambda(T-\eta)^{\alpha};\alpha]\Big[\sum_{j=1}^{k}a^{j}\,(x,\,\eta)\,u\left(x,\,t_{j}\right)+\upsilon(x,\eta)\Big]=\mu(x),$$

откуда

$$\nu_{m}(x)=\frac{1}{E_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};1)}\Big[\mu(x)-\sum_{i=1}^{m-1}\nu_{i}(x)T^{m-i}E_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};m-i+1)-$$

$$-\Gamma(\alpha)D_{0T}^{-m}E_{1/\alpha}[\lambda(T-\eta)^{\alpha};\alpha]\Big[\sum_{j=1}^{k}a^{j}(x,\eta)\,u\left(x,t_{j}\right)+\upsilon(x,\eta)\Big]\Big].$$

Подставляя полученное выражение для $\nu_m(x)$ в представление (4) будем иметь:

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{m-1}\nu_i(x)\Bigg[t^{\alpha-i}E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};\alpha-i+1)-$$

$$-\frac{t^{\alpha-m}E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};\alpha-m+1)T^{m-i}E_{1/\alpha}[\lambda(T-\eta)^{\alpha};m-i+1]}{E_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{\mu(x)t^{\alpha-m}E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};\alpha-m+1)}{E_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};1)}+\Gamma(\alpha)\,D_{0t}^{-\alpha}\mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda\,(t-\eta)^{\alpha};\alpha\right]a^{j}(x,\eta)-$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha)t^{\alpha-m}E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};\alpha-m+1)D_{0T}^{-m}E_{1/\alpha}[\lambda(T-\eta)^{\alpha};\alpha]a^{j}(x,\eta)}{E_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};1)}+$$

$$+\Gamma(\alpha)\,D_{0t}^{-\alpha}\mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda\,(t-\eta)^{\alpha};\alpha\right]\upsilon(x,\eta)-$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha)t^{\alpha-m}E_{1/\alpha}(\lambda t^{\alpha};\alpha-m+1)D_{0T}^{-m}E_{1/\alpha}[\lambda(T-\eta)^{\alpha};\alpha]\upsilon(x,\eta)}{E_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};1)}. \tag{5}$$

С учетом обозначений, введенных выше при формулировке теоремы 1, выражение (5) можно переписать в виде

$$u(x,t)=U(\nu,\,\mu,\,\upsilon,\,\lambda;x,\,t)+\sum_{j=1}^{k}A^{j}(x,t)u(x,t_j). \tag{6}$$

Найдем искомые функции $u(x,t_j)$, $j=\overline{1,k}$, входящие в формулу (6). Для этого перепишем уравнение (6) при $t=t_1$, $t=t_2$, ..., $t=t_k$. В результате относительно искомых функций $u(x,t_j)$, $j=\overline{1,k}$ придем к следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$\left[1-A^{i}(x,t_i)\right]u(x,t_i)-\sum_{j=1}^{k}\left(1-\delta_{ij}\right)A^{j}(x,t_i)\,u\left(x,t_j\right)=U(\nu,\,\mu,\,\upsilon,\,\lambda;x,t_i),\quad i=1,2,...,k,$$

которая имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля для любого $x\in[0,r]$.

В частном случае, когда $k=1$ представление (6) примет вид

$$u(x,t)=U(\nu,\,\mu,\,\upsilon,\,\lambda;x,\,t)+A(x,t)u(x,t_1). \tag{7}$$

Положив в равенстве (5) $t=t_1$, находим

$$u(x,t_1)=\frac{U(\nu,\,\mu,\,\upsilon,\,\lambda;x,\,t_1)}{1-A(x,t_1)},$$

при условии, что $A(x,t_1)\neq 1$.

Таким образом, если коэффициенты α, λ, $a(x,t)$ *задачи 1* таковы, что выполнено условие

$$A(x,t_1) = \Gamma(\alpha) D_{0t_1}^{-\alpha} \mathrm{E}_{1/\alpha}\left[\lambda (t_1-\eta)^{\alpha};\alpha\right] a(x,\eta) -$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha) t_1^{\alpha-m} E_{1/\alpha}(\lambda t_1^{\alpha};\alpha-m+1) D_{0T}^{-m} E_{1/\alpha}[\lambda(T-\eta)^{\alpha};\alpha] a(x,\eta)}{E_{1/\alpha}(\lambda T^{\alpha};1)} \neq 1,$$

то при $k=1$ существует единственное решение задачи 1, которое можно записать в следующем виде:

$$u(x,t) = U(\nu,\,\mu,\,\upsilon,\,\lambda;x,\,t) + A(x,t)\frac{U(\nu,\,\mu,\,\upsilon,\,\lambda;x,\,t_1)}{1-A(x,t_1)}.$$

Список литературы

[1] Barrett J. H., “Differential equation of noninteger”, *J. Math. Canad.*, **6**:4 (1954), 529-541.

[2] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2003, 272 с., [Nakhushev A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie. Moskva. FIZMATLIT. 2003. 272 (in Russian)].

[3] Нахушева В. А., *Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов*, Наука, М., 2006, 174 с., [Nakhusheva V. A. Differentsial'nye uravneniya matematicheskikh modeley nelokal'nykh protsessov. Moskva. Nauka. 2006. 174 (in Russian)].

[4] Нахушева В. А., “Задачи Коши и Дирихле в видоизмененной постановке для одного класса нагруженных дифференциальных уравнений дробного порядка”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **11**:1 (2009), 6-9, [Nakhusheva V. A. Zadachi Koshi i Dirikhle v vidoizmenennoy postanovke dlya odnogo klassa nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka. Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk. 2009. 11:1 6-9 (in Russian)].

[5] Нахушев А. М., *Нагруженные уравнения и их применение*, Наука, М., 2012, 232 с., [Nakhushev A. M. Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie. Moskva. Nauka. 2012. 232 (in Russian)].

[6] Кажарова Р. З., “Об одной краевой задаче для нагруженного дифференциального уравнения дробного порядка”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **12**:1 (2010), 25-30, [Kazharova R. Z. Ob odnoy kraevoy zadache dlya nagruzhennogo differentsial'nogo uravneniya drobnogo poryadka. Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk. 2010. 12:1, 25-30 (in Russian)].

[7] Псху А. В., *Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка*, Издательство КБНЦ РАН, Нальчик, 2005, 186 с., [Pskhu A. V. Kraevye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi drobnogo i kontinual'nogo poryadka. Nal'chik. Izdatel'stvo KBNTs RAN. 2005. 186 (in Russian)].

[8] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., 1995, 301 с., [Nakhushev A. M. Uravneniya matematicheskoy biologii. Moskva. Vysshaya shkola. 1995. 301 (in Russian)].

Для цитирования: Березгова Р. З. Краевая задача для нагруженного дифференциального уравнения с оператором Барретта в главной части // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2016. № 4(15). С. 7-11. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-15-4-7-11

For citation: Berezgova R. Z. A boundary value problem for loaded differential equation with the Barrett operator in the main part, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2016, **15**: 4, 7-11. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-15-4-7-11

Поступила в редакцию / Original article submitted: 18.10.2016