

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-85-92

УДК 519.1

СЕТЕВАЯ ЗАДАЧА ШТЕЙНЕРА С УЧЕТОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ

Багов М. А., Кудаев В. Ч.

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 а

E-mail: marat.bagov@mail.ru

В работе представлен метод оптимизации трубопроводной сети Штейнера основанный на динамической декомпозиции.

Ключевые слова: терминальная сеть, преобразование, сеть Штейнера, оптимизация, декомпозиция.

© Багов М. А., Кудаев В. Ч., 2016

MSC 65N80

STEINER NETWORK PROBLEM IN VIEW OF ENERGY COSTS

M. A. Bagov, V. Ch. Kudaev

Institute of Applied Mathematics and Automation 360000, Kabaerdino-Balkariya, Nalchik, Shortanova st., 89 a,

Russia

E-mail: marat.bagov@mail.ru

The optimization method for the Steiner pipeline network based on dynamic decomposition.

Key words: terminal network, transformation, Steiner network optimization, decomposition.

© Bagov M. A., Kudaev V. Ch., 2016

Введение

В классической задаче Штейнера [1,2] заданные на плоскости n точек следует соединить друг с другом отрезками прямых линий так, чтобы сумма длин отрезков была наименьшей. Концевыми точками отрезков не обязательно являются заданные точки. Известно, что количество таких дополнительных точек (точки Штейнера) вообще говоря, равно $(n - 2)$. При этом каждая из точек Штейнера имеет степень равную трем. Именно с этими связана сложность задачи-количество возможных структур соединений растет по экспоненте. Задача Штейнера открыла новое направление в теории оптимизации – структурную оптимизацию и к настоящему времени не решена [2]. Интерес к задаче Штейнера в настоящее время связан не только с самой математической проблемой, а и с большой актуальностью задачи для пространственной экономики и, в первую очередь, с проектированием оптимальных сетей по переносу вещества и энергии. В этом случае следует минимизировать уже не длину, а общую стоимость коммуникаций, связывающих пункты потребления сетевого продукта с его источниками. Эту более общую задачу будем называть сетевой задачей Штейнера (СЗШ). В данной работе представлен метод построения сети Штейнера 2-го ранга оптимальности. Эту более общую задачу будем называть сетевой задачей Штейнера (СЗШ).

Сетевая задача Штейнера с учетом энергетических затрат.

1. Постановка сетевой задачи Штейнера с учетом энергетических затрат.

На плоскости задан полный ориентированный геометрический граф $\Gamma(B, D)$ n вершин которого (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ фиксированы и $(n - 2)$ вершин (x_i, y_i) , $i = n + 1, \dots, 2n - 2$ не фиксированы. Требуется определить координаты не фиксированных вершин и так приписать каждой дуге (i, j) графа поток v_{ij} , что:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \sum_{ij \in D} f_{ij}(v_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \rightarrow \min, \quad (1) \\ \sum_{ij \in \Gamma_j^+} v_{ij} - \sum_{jk \in \Gamma_j^-} v_{jk} = q_j, \forall j \in B, \quad (2) \\ \sum_{j \in \Gamma_1} v_{1j} = \sum_{i \in B_\Phi} g_i, \quad (3) \\ v_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in D, \quad (4) \\ x_i = a_i, y_i = b_i, \forall i \in B_\Phi, \quad (5) \end{array} \right.$$

где $B = B_\Phi \cup B_\Psi$, B_Φ – множество фиксированных вершин, B_Ψ – множество точек Штейнера, $|B_\Phi| = n$, $|B_\Psi| = m \leq n - 2$, $f_{ij}(v_{ij})$ – вогнутая непрерывно возрастающая функция, $f_{ij}(0) = 0$. Целевая функция (1) отражает общую стоимость коммуникаций сети, уравнение (2) есть уравнение неразрывности потока в сети, уравнение (3) – соотношение между источником и стоками.

Поскольку точки Штейнера лежат на выпуклой оболочке фиксированных на плоскости n точек, а (2)-(5) – транспортный многогранник, множество допустимых решений задачи ограничено и замкнуто. Поскольку целевая функция вогнута по $v_{i,j}$, $i, j \in D$ на транспортном многограннике (2)-(5), то локальный и глобальный экстремумы достигаются в его угловых точках, которым соответствуют, как известно, основные деревья графа $\Gamma(B, D)$. Поскольку же возможных остовных деревьев графа $\Gamma(B, D)$, построенных на n фиксированных точках и $(n - 2)$ точках Штейнера, конечное число,

и на каждом из них целевая функция непрерывна, то задача (1)-(5) имеет оптимальное решение, но, возможно, не единственное.

Функционирование сетей по переносу сетевого продукта (вода, газ, нефть) зависит не только от величин потоков $v_{ij}, ij \in D$ по ветвям сети, но и потерь потенциала $h_{ij}, v_{ij} \in D$ по ветвям. Затраты на создание и функционирование сети при этом складываются из стоимости коммуникаций (например, трубопроводов) сети и энергетических затрат на прокачку сетевого продукта по коммуникациям от источника к потребителям - в нашем случае к фиксированным (терминальным) p точкам. Поэтому целевой функционал, более полно оценивающий затраты, имеет вид

$$Z = \sum_{ij \in D} \varphi_{ij}(v_{ij}, h_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (6).$$

Как известно [3], затраты на коммуникацию могут быть рассчитаны по формуле $Z_{ij} = (kv_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta + v_{ij} h_{ij}) l_{ij}$, где $0 < \alpha < 1, \beta < 0, l_{ij}$ - длина коммуникации. Первое слагаемое характеризует стоимость коммуникации, второе - энергетические затраты на транспорт сетевого продукта по коммуникации. В таком случае вместо (1) получим

$$Z = \sum_{ij \in D} (k v_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta + v_{ij} h_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \rightarrow \min.$$

В работе [4] показано что этот функционал приводится к виду

$$Z = \sum_{ij \in D} v_{ij} j^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \rightarrow \min \quad (7),$$

т.е. получена формула перехода от $\varphi_{ij}(v_{ij}, h_{ij})$ к $f_{ij}(v_{ij}) = v_{ij}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}}$. Таким образом, задача (7), (2)-(5) и есть сетевая задача Штейнера с учетом энергетических затрат.

R-оптимальное решение СШЗ с учетом энергетических затрат

Поскольку $0 < \frac{\beta-\alpha}{\beta-1} < 1$, то задача (7), (2)-(5) является задачей минимизации строго вогнутой функции при линейных ограничениях и, значит, для нее остаются справедливыми свойства решений СЗШ. Поэтому в основе представляемого метода решения задачи лежит метод решения СЗШ [5,6]. Конкретизация целевого функционала задачи к виду (7) скажется лишь на решении элементарной (3-х точечной) сетевой задачи Штейнера.

Назовем сеть Штейнера R-оптимальной, если для любого ее фиксированного узла, подграф сети, включающий вершины R-достижимые из узла (без учета направления дуг), является оптимальным. Оптимизация каждой подсети приводит при этом к оптимизации всей сети за счет того, что подсети пересекаются.

Решение СЗШ с учетом энергетических затрат будет при этом состоять из следующих этапов:

1. В связи с экспоненциальным ростом структур Штейнера, при поиске R-оптимального решения следует стартовать с решения достаточно близкого по значению целевого функционала к оптимуму в задаче (7), (2) - (5). В качестве такового берется оптимальное решение сетевой задачи построения терминальной сети т.е. сети без точек Штейнера [7].

2. Преобразование полученного терминального сетевого остовного дерева в сеть Штейнера на основе разворачивания узлов терминальной сети в альтернативные узловые структуры Штейнера с оптимизацией координат точек Штейнера и выделением из альтернативных структур наилучшей.

3. Оптимизация координат точек Штейнера на полученном остовном дереве Штейнера.

4. Глобальное решение сетевых задач Штейнера на его компактных подграфах (фрагментах) определенной размерности.

Преобразование терминального остовного дерева в сеть Штейнера осуществляется путем разворачивания его узлов в структуры Штейнера. Каждый такой узел содержит вершину из которой поступает поток в узел (исток) и вершин в которые доставляется поток из узла (стоки). В сетевых системах могут быть узлы с одним, двумя и тремя выходными потоками. Для узла содержащего наибольшее количество вершин (входная, узловая, три выходные вершины) имеем 8 альтернативных узловых структур Штейнера [6] (см. рис. 1, где 6,7,8 – точки Штейнера).

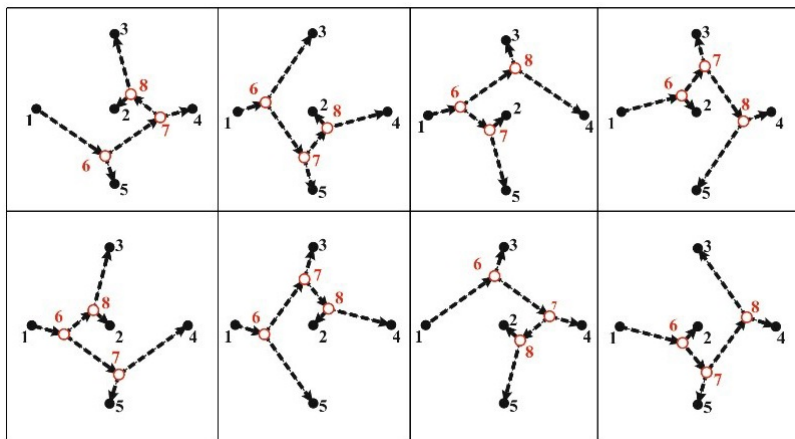


Рис. 1. Альтернативные узловые структуры Штейнера

Рассмотрим более детально п.4.

Целью этого этапа оптимизации является построение такой сети Штейнера, любая подсеть определенной размерности которой, оптимальна. Задача решается методом динамической декомпозиции.

Пусть i – текущая вершина сети Штейнера в процессе оптимизации структуры сети. Обозначим:

– P_i – подсеть сети Штейнера стягивающая множество M_i^P вершин не более чем P – достижимых из i (без учета направления дуг);

– $M_i^{P-1}, \bar{M}_i^P, \bar{M}_i^{P+1}$ – соответственно множество вершин не более чем $(P-1)$ – достижимых, P – достижимых, $(P+1)$ – достижимых из i -ой вершины, которые будем называть для краткости внутренними вершинами, внутренним контуром и внешним контуром P_i -ой подсети.

Схема алгоритма динамической декомпозиции такова:

1. Выделяется текущая вершина i сети Штейнера.

2. Определяются $P_i, M_i^{P-1}, M_i^P, \bar{M}_i^P, \bar{M}_i^{P+1}$.

3. Устраняются все дуги между вершинами из M_i^P P_i -ой подсети.

4. Устраняются внутренние точки Штейнера P_i -ой подсети и формируется множество $M\Phi_i^{P-1}$ фиксированных внутренних вершин.

5. Определяется количество внутренних точек Штейнера $m_i = |M_i^P| - 2$ в формируемой подсети.

6. Формируется (генерируется) очередная подсеть Штейнера стягивающая точки множества $M\Phi_i^{P-1} \cup \bar{M}_i^P$.

7. Решается задача оптимизации координат точек Штейнера сформированной подсети и определяется общая стоимость ее коммуникаций. При этом варьируются координаты не только внутренних точек Штейнера, но и точек Штейнера расположенных на внутреннем контуре сети.

Таким образом, для наилучшего согласования оптимизации подсети со всей остальной сетью, внутренний контур подвижен для его точек Штейнера, а внешний контур фиксирован.

Пункты 6 и 7 повторяются для всех генерируемых альтернативных подсетей Штейнера текущей вершины i с отбором оптимальной по стоимости коммуникаций.

Далее переходим к оптимизации P_{i+1} -й подсети сети Штейнера.

Процесс оптимизации структуры сети завершается при построении такой сети Штейнера, любая подсеть P -го ранга которой, оптимальна.

Достаточно просто реализуется 2-оптимальная сеть Штейнера, так как в этом случае количество внутренних точек Штейнера в подсети не более трех. Таких структур Штейнера восемь. Их вид указан на рис.

Решение элементарной сетевой задачи Штейнера при учете энергетических затрат

Оптимизация параметров на каждой из альтернативных структур каждого фрагмента формируемой сети Штейнера проводится на основе решения на каждой структуре элементарных (3-х точечных) сетевых задач Штейнера (ЭСЗШ).

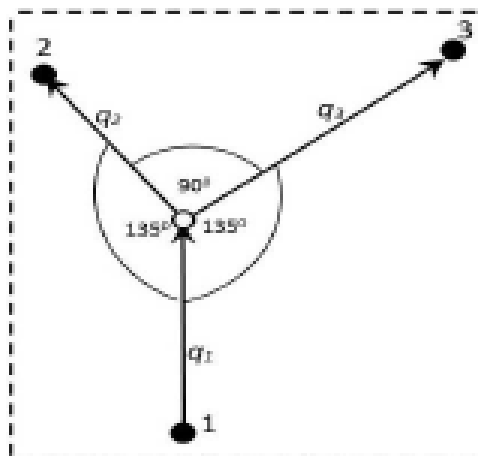


Рис. 2. Альтернативные узловые структуры Штейнера

Элементарная задача Штейнера [1] состоит в следующем: определить координаты точки (x, y) на плоскости так, чтобы сумма расстояний от нее до заданных трех точек $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ была наименьшей. Точку (x, y) называют точкой Штейнера. То, что точка Штейнера соединяется именно с тремя точками, принципиально - именно

такую структуру должны иметь кратчайшие по длине сети соединяющие заданные на плоскости n точек. Решение элементарной задачи Штейнера известно: отрезки трех прямых, каждый из которых соединяет одну из заданных точек с точкой Штейнера, образуют друг с другом углы в 120° .

Элементарная сетевая задача Штейнера отличается тем, что стоимость коммуникаций сети определяется не только их длиной, но и интенсивностью потока, приписанного им, то есть

$c_i = f_i(v_i)l_i, i = 1, 2, 3$, где l_i, v_i и $f_i(v_i)$ – соответственно длина, поток и удельная стоимость i -й коммуникации. Таким образом, имеем следующую задачу:

$$c = \sum_{i=1}^3 f_i(v_i) \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \rightarrow \min,$$

где (x, y) – искомые координаты точки Штейнера, $f_i(v_i) = v_i^p, p = \frac{\beta - \alpha}{\beta - 1}$. Как известно, элементарная (3-х точечная) задача Штейнера с заданными весами ребер p_i, p_j, p_k имеет следующее решение [8]:

$$\cos \theta_{i-j} = \frac{f_k^2(v_k) - f_i^2(v_i) - f_j^2(v_j)}{2f_i(v_i)f_j(v_j)}, \quad (8)$$

где θ_{i-j} – угол между i и j коммуникациями, сходящимися в точке (x, y) . В случае $f(v) = 1$ (как в элементарной задаче Штейнера) $\theta_{i-j} = 120^\circ$. Именно вследствие этого существующие методы декомпозиции решения классической задачи Штейнера (минимизация общей длины сети) [2] неприменимы для решения СЗШ.

Разработана программа определения оптимальных координат точки Штейнера методом Ньютона на языке C Sharp. Начальное положение точки Штейнера выбирается равным $x_0 = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)}{3}, y_0 = \frac{(y_1 + y_2 + y_3)}{3}$.

При решении задачи методом Ньютона вначале определяются косинусы углов между смежными ветвями элементарной сети Штейнера по формуле (8) и далее решается задача определения оптимальных координат точки Штейнера:

$$\begin{cases} f_1 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - \\ - 2\cos\alpha_{23} \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} - l_{23} = 0 \\ f_2 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - \\ - 2\cos\alpha_{13} \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - l_{13} = 0, \end{cases}$$

где l_{23}, l_{13} – длины отрезков соединяющих фиксированные точки $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$, и $(x_1, y_1), (x_3, y_3)$. Приближения x^{j+1}, y^{j+1} находим путем решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x^{j+1} = x^j - \left(\frac{\frac{\partial f_1}{\partial y} [y^{j+1} - y^j] + f_1^j}{\frac{\partial f_1}{\partial y} (x^j, y^j)} \right) \\ y^{j+1} = y^j - \left(\frac{\frac{\partial f_2}{\partial x} [x^{j+1} - x^j] + f_2^j \frac{\partial f_2}{\partial y} (x^j, y^j)}{\frac{\partial f_2}{\partial x} (x^j, y^j)} \right), \end{cases}$$

$$\text{где } \frac{\partial f_1(x^j, y^j)}{\partial x} = 2(x^j - x_2) + 2(x^j - x_3) - 2\cos\alpha_{23} \left[\frac{(x^j - x_2) \sqrt{(x^j - x_3)^2 + (y^j - y_3)^2}}{\sqrt{(x^j - x_2)^2 + (y^j - y_2)^2}} + \frac{(x^j - x_3) \sqrt{(x^j - x_2)^2 + (y^j - y_2)^2}}{\sqrt{(x^j - x_3)^2 + (y^j - y_3)^2}} \right],$$

$$\frac{\partial f_1(x^j, y^j)}{\partial y} = 2(y^j - y_2) + 2(y^j - y_3) - 2\cos\alpha_{23} \left[\frac{(y^j - y_2) \sqrt{(x^j - x_3)^2 + (y^j - y_3)^2}}{\sqrt{(x^j - x_2)^2 + (y^j - y_2)^2}} + \frac{(y^j - y_3) \sqrt{(x^j - x_2)^2 + (y^j - y_2)^2}}{\sqrt{(x^j - x_3)^2 + (y^j - y_3)^2}} \right],$$

Аналогичным образом определяются значения $\frac{\partial f_2(x^j, y^j)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f_2(x^j, y^j)}{\partial y}$. Решение задачи прекращается при достижении заданной точности: $\sqrt{(f_1^j)^2 + (f_2^j)^2} \leq 0,01$. Ниже представлены результаты вычислительного эксперимента на двух ЭСЗШ:

Метод Ньютона									
№ итерации	Затраты на элементарную сеть в усл. ед.	XSt	YSt	X1	Y1	X2	Y2	X3	Y3
0	775,18	546	293,67	300	396	638	399	700	86
1	764,7	540,83	354,96						
2	763,1	543,05	340,65						
Оптимальная стоимость: 763,1									
Оптимальные координаты Точки Штейнера: X=543,05 Y = 340,65									
Время выполнения скрипта: 00:00:00.0024945									

Метод Ньютона									
№ итерации	Затраты на элементарную сеть в усл. ед.	XSt	YSt	X1	Y1	X2	Y2	X3	Y3
0	303,22	200	200	100	200	300	250	200	150
1	295,84	175,33	198,46						
2	291,93	179,66	185,26						
3	291,56	182,05	180,27						
4	291,54	182,52	179,4						
Оптимальная стоимость: 291,54									
Оптимальные координаты точки Штейнера: X = 182,52 Y = 179,4									
Время выполнения скрипта: 00:00:00.0039338									

Проведенный вычислительный эксперимент показал эффективность применения метода Ньютона в решении ЭСЗШ.

На основе представленного метода динамической декомпозиции разрабатывается компьютерная система автоматизированного проектирования региональных распределительных сетей 2-го ранга оптимальности.

Список литературы/References

- [1] Гилберт Э.Н., Поллак Г.О., “Минимальные деревья Штейнера”, *Кибернетический сборник. Новая серия*, 1971, № 8, 19-49, [Gilbert E. N., Pollak G. O. Minimal'nye derev'ya Shteynera. Kiberneticheskiy sbornik. Novaya seriya., no.8, 1971, 19-49 (in Russian)].
- [2] Гордеев Э.Н., Тарасцов О.Г., “Задача Штейнера. Обзор”, *Дискретная математика*, 5:2 (1993), 3-28, [Gordeev E. N., Tarastsov O. G. Zadacha Shteynera. Obzor. Diskretnaya matematika. vol. 5, no. 2, 1993, 3-28 (in Russian)].

- [3] Меренков А. П., Сеннова Е. В., Сумароков С. В., Сидлер В. Г., Новитский Н. Н., Стенников В. А., Чупин В. Р., *Математическое моделирование и оптимизация систем тепло- водо- нефте- и газоснабжения*, Наука, Новосибирск, 1992, 406 с., [Merenkov A. P., Sennova E. V., Sumarokov S. V., Sidler V. G., Novitskiy N. N., Stennikov V. A., Chupin V. R. *Matematicheskoe modelirovanie i optimizatsiya sistem teplovodo- nefte- i gazosnabzheniya*. Nauka, Novosibirsk, SO RAN, 1992, 406 p (in Russian)].
- [4] Багов М. А., “Задачи проектирования трубопроводной сети Штейнера”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2016, №4-1(16), 78-82, [Bagov M. A. *Zadachi proektirovaniya truboprovodnoy seti Shteynera*. Vestnik KRAUNTС. Fiziko-matematicheskie nauki. 2016. 4-1(16). 78-82].
- [5] Кудяев В. Ч., Багов М. А., “Локальное решение сетевой задачи Штейнера”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Академии наук*, **16:4** (2014), 9-14, [Kudaev V. Ch., Bagov M. A. *Lokal'noe reshenie setevoy zadachi Shteynera*. Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Akademii nauk., 2014, vol. 16, no 4., 9-14 (in Russian)].
- [6] Кудяев В. Ч., Багов М. А., “Преобразование терминальной сети в сеть Штейнера”, *Известия КБНЦ РАН*, 2015, №6(68), 31-37, [Kudaev V. Ch., Bagov M. A. *Preobrazovanie terminal'noy seti v set' Shteynera*. Izvestiya KBNTs RAN, no 6(68), 2015, 31-37 (in Russian)].
- [7] Кудяев В. Ч., “Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем”, *Известия КБНЦ РАН*, 2016, №4(72), 15-24, [Kudaev V. Ch. *Rangi ekstremumov i strukturnaya optimizatsiya bol'shikh setevykh sistem*. Izvestiya KBNTs RAN. 2016. 4(72). 15-24 (in Russian)].
- [8] Gilbert E. N., “Minimal Cost Communication Networks”, *Bell System technological Journal*, 1967, №9, 48-50.

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Гилберт Э. Н. Минимальные деревья Штейнера // Кибернетический сборник. Новая серия. вып.8. 1971 С. 19-49
- [2] Гордеев Э. Н., Тарасцов О. Г. Задача Штейнера. Обзор // Дискретная математика. 1993. Т. 5. вып. 2. С. 3-28
- [3] Меренков А. П., Сеннова Е. В., Сумароков С. В., Сидлер В. Г., Новитский Н. Н., Стенников В. А., Чупин В. Р. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло- водо- нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992. 406 с.
- [4] Багов М. А. Задачи проектирования трубопроводной сети Штейнера // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2016. №4-1(16). С. 78-82
- [5] Багов М. А., Кудяев В. Ч. Локальное решение сетевой задачи Штейнера // Доклады Адыгской (Черкесской) Академии наук. 2014. Т. 16, №4. С.9-14
- [6] Багов М. А., Кудяев В. Ч. Преобразование терминальной сети в сеть Штейнера // Известия КБНЦ РАН. 2015. №6(68). С.31-37
- [7] Кудяев В. Ч. Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Известия КБНЦ РАН. 2016. №4(72). С. 15-24
- [8] Gilbert E. N. Minimal Cost Communication Networks // Bell System technological Journal. 1967. № 9. pp. 48-50

Для цитирования: Багов М. А., Кудяев В. Ч. Сетевая задача Штейнера с учетом энергетических затрат // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). С. 85-92. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-85-92

For citation: Bagov M. A., Kudaev V. Ch. Steiner network problem in view of energy costs, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **16**: 4-1, 85-92. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-85-92