Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). С. 80-84. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-80-84

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 519.1

ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТРУБОПРОВОДНОЙ СЕТИ ШТЕЙНЕРА

М. А. Багов

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 а

E-mail: maratniipma@mail.ru

Представлены математические модели задач проектирования оптимальных по приведенной стоимости трубопроводных сетей Штейнера.

Ключевые слова: математическая модель, трубопроводная сеть, сетевая задача Штейнера.

INFORMATION AND COMPUTATION TECHNOLOGIES

MSC 65N80

DESIGN PROBLEMS FOR THE STEINER PIPE NETWORK

M. A. Bagov

Institute of Applied Mathematics and Automation 360000, Kabaerdino-Balkariya, Nalchik, Shortanova st., 89 a,
Russia

E-mail: maratniipma@mail.ru

In this paper, a mathematical model for the Steiner pipeline networks design problems is presented in view of its optimal cost.

Key words: mathematical model, pipeline network, network Steiner problem.

Введение

Интерес к задаче Штейнера в настоящее время связан не только с самой математической проблемой, а и с большой актуальностью задачи для пространственной экономики и, в первую очередь, с проектированием оптимальных сетей по переносу вещества и энергии.

Постановка сетевой задачи Штейнера

Формулировка задачи Штейнера состоит в следующем [1,2]. Заданные на плоскости n точек общего положения следует соединить отрезками прямых линий так, чтобы сумма длин отрезков была наименьшей. При этом концевыми точками отрезков не обязательно являются заданные точки. Доказано, что число таких дополнительных точек (т.н. точек Штейнера), координаты которых неизвестны, не превосходит $(n-2)$. Задача Штейнера (ЗШ) открывает новое направление в теории оптимизации - оптимизацию структур. В связи с экспоненциальным ростом структур в сравнении с n, перспектива решения таких задач связана с развитием вычислительной техники и теорией алгоритмов. Возможные приложения решения задачи многочисленны, например, создание оптимальных коммуникационных сетей, теория генных структур [1]. В [3,4] была представлена постановка сетевой задачей Штейнера (СЗШ). В этой задаче, в отличии от ЗШ, следует минимизировать не суммарную длину коммуникаций, а их общую стоимость.

На плоскости задан полный ориентированный геометрический граф (B,D), n вершин которого (x_i,y_i), $i=1,...,n$ фиксированы, а $(n-2)$ вершины (x_i,y_i), $i=n+1,...,2n-2$ не фиксированы. Следует так определить координаты не фиксированных вершин и так приписать каждой дуге $i,j\in D$ поток v_{ij}, что

$$\begin{cases} C=\sum\limits_{i,j\in D} f_{ij}(v_{ij})\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}\to min, & (1)\\ \sum\limits_{i,j\in\Gamma_j^+} v_{ij}-\sum\limits_{k\in\Gamma_j^-} v_{jk}=q_j, \forall j\in B; \quad \sum\limits_{j\in\Gamma_1} v_{1j}=\sum\limits_{j\in B_\Phi} q_j, & (2),(3)\\ v_{ij}\geq 0,\ \forall i,j\in D;\ x_i=a_i,\ y_i=b_i,\ \forall i\in B_\Phi, & (4),(5)\end{cases}$$

где $B=B_\Phi\cup B_{Ш}$, B_Φ - множество фиксированных вершин, $B_{Ш}$- множество точек Штейнера, $B_\Phi=n$, $B_{Ш}=m\leq n-2$, $f_{ij}(v_{ij})$ - вогнутая непрерывно возрастающая функция, $f_{ij}(0)=0$; $q_j>0$, $j\in B_\Phi$ и $q_j=0, j\in B_{Ш}$. Целевая функция (1) отражает общую стоимость коммуникаций сети. В [3] было показано, что задача (1) - (5) имеет оптимальное решение. Поскольку целевая функция вогнута по $v_{ij}, i,j\in D$ на транспортном многограннике (2) - (5), то локальные и глобальный экстремумы достигаются в его угловых точках, которым соответствуют, как известно, остовные деревья графа $\Gamma(B,D)$.

Математические модели проектирования трубопроводных сетей Штейнера

Функционирование сетей по переносу сетевого продукта (вода, газ, нефть) зависит не только от величин потоков v_{ij}, $i,j\in D$ по ветвям сети, но и потерь потенциала h_{ij}, $i,j\in D$ по ветвям. Затраты на создание и функционирование сети при этом складываются из стоимости коммуникаций (например, трубопроводов) сети и энергетических затрат на прокачку сетевого продукта по коммуникациям от источника к потребителям - в нашем случае к фиксированным (терминальным) n точкам. Поэтому целевой функционал, более полно оценивающий затраты, имеет вид

$$З = \sum_{i,j \in D} \varphi_{ij}(v_{ij}, h_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \tag{6}$$

Покажем, что этот функционал для используемых при реальном проектировании методов оценки затрат сводится к функционалу (1). При этом получим и соответствующие формулы перехода от (6) к (1).

Как известно [5], затраты на коммуникацию могут быть рассчитаны по формуле $З_{ij} = (kv_{ij}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} + v_{ij} h_{ij}) l_{ij}$, где $0 < \alpha < 1$, $\beta < 0$, l_{ij} - длина коммуникации. Первое слагаемое характеризует стоимость коммуникации, второе - энергетические затраты на транспорт сетевого продукта по коммуникации. В таком случае вместо (1) получим

$$З = \sum_{i,j \in D} (kv_{ij}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} + v_{ij} h_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \to min. \tag{7}$$

Рассмотрим любое распределение потоков в задаче (7), (2) - (5).

Поскольку целевая функция выпукла и непрерывна по h_{ij}, то на оптимальном решении получим $\frac{\partial З}{\partial h_{ij}} = (k\beta v_{ij}^{\alpha} h_{ij}^{\beta - 1} + v_{ij}) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} = 0$, $i, j \in D$, то есть $h_{ij}^{\beta - 1} = \frac{v_{ij}^{1-\alpha}}{-k\beta}$, $h_{ij} = (-k\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} v_{ij}^{\frac{1-\alpha}{\beta - 1}}$.

Отсюда получим: $З = \sum\limits_{i,j \in D} (-k\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} (\frac{\beta - 1}{\beta}) v_{ij}^{\frac{\beta - \alpha}{\beta - 1}} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$.

Поскольку $(-k\beta)^{\frac{1}{1-\beta}} (\frac{\beta - 1}{\beta}) - -const$, то целевая функция примет вид:

$$\sum_{i,j \in D} v_{ij}^{\frac{\beta - \alpha}{\beta - 1}} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \to min.$$

Итак, получена формула перехода от $\varphi_{ij}(v_{ij}, h_{ij})$ к $f_{ij}(v_{ij})$: $f_{ij}(v_{ij}) = v_{ij}^{\frac{\beta - \alpha}{\beta - 1}}$.

Рассмотрим теперь задачу проектирования сети Штейнера на заданном сортаменте труб.

Пусть $d_1, d_2, ..., d_p$ и $C_1, C_2, ..., C_p$ - соответственно диаметры и цены труб. Рассмотрим любое удовлетворяющее ограничениям (2) - (5) распределение потоков по $\Gamma(B, D)$ и любую ij-ю ветвь на которой $v_{ij} > 0$. Определим значение удельных потерь потенциала при движении потока v_{ij} по трубе диаметром d_k i, j - ветви сети по формулам гидравлики (Дарси - Вайсбаха): $h_{ij}^k = \lambda \frac{v_{ij}^2}{d_k^{5,25}}$, $k = 1, ..., p$.

С учетом того, что в самом общем случае любая ветвь сети может быть сконструирована с участием труб всех диаметров, т.е. является их линейной комбинацией, получим: $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ij}^k C_k$, $h_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ij}^k h_{ij}^k$, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_{ij}^k = 1$, $\alpha_{ij}^k \geq 0$, $k = 1, ..., p$, $i, j \in D$.

Тогда на любом распределении потоков имеем задачу:

$$З = \sum_{i,j \in D'} \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ij}^k (C_k + v_{ij} h_{ij}^k) \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \to min,$$

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{ij}^{k} = 1,\ \alpha_{ij}^{k} \geq 0,\ k = 1,...,p,\ i,j \in D',$$

где D'-дуги графа по которым поток отличен от нуля.

Поскольку на любом фиксированном распределении потоков по графу сети искомые значения α_{ij}^{k}, $k = 1,...,p$ не зависят от значений корня и значений переменных по иным ветвям, то их значения определяются из решения задачи линейного программирования для каждой ветви ij:

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{ij}^{k}(C_k + v_{ij}h_{ij}^{k}) \to min,\ \sum_{k=1}^{p} \alpha_{ij}^{k} = 1,\ \alpha_{ij}^{k} \geq 0,\ k = 1,...,p.$$

В силу базисности оптимального решения только одна из переменных $\alpha_{ij}^{1},...,\alpha_{ij}^{p}$, $i,j \in D'$ отлична от нуля и значит равна 1. Эта та из переменных, на которой целевая функция принимает наименьшее значение, т.е. $f_{ij}(v_{ij}) = min_{1\leq k\leq p}\{C_k + v_{ij}h_{ij}^{k}\}$. Таким образом, задача на любом фиксированном потоке сведена к виду (1) - (6). Имея набор труб на котором проводится конструирование сети можно построить функцию $f(v)$ явно ? это точная нижняя грань набора функций $C_1 + \frac{v^3}{D_1^{5,25}}, C_2 + \frac{v^3}{D_2^{5,25}}, ..., C_p + \frac{v^3}{D_p^{5,25}}$, то есть: $f(v) = min\{C_1 + \frac{q^3}{D_1^{5,25}}, C_2 + \frac{q^3}{D_2^{5,25}}, ..., C_p + \frac{q^3}{D_p^{5,25}}\},\ 0 \leq v \leq v_max.$

Главное в этом представлении - пределы величин потоков в которых каждая из заданного набора труб является оптимальной для конструирования коммуникаций (см. рис.).

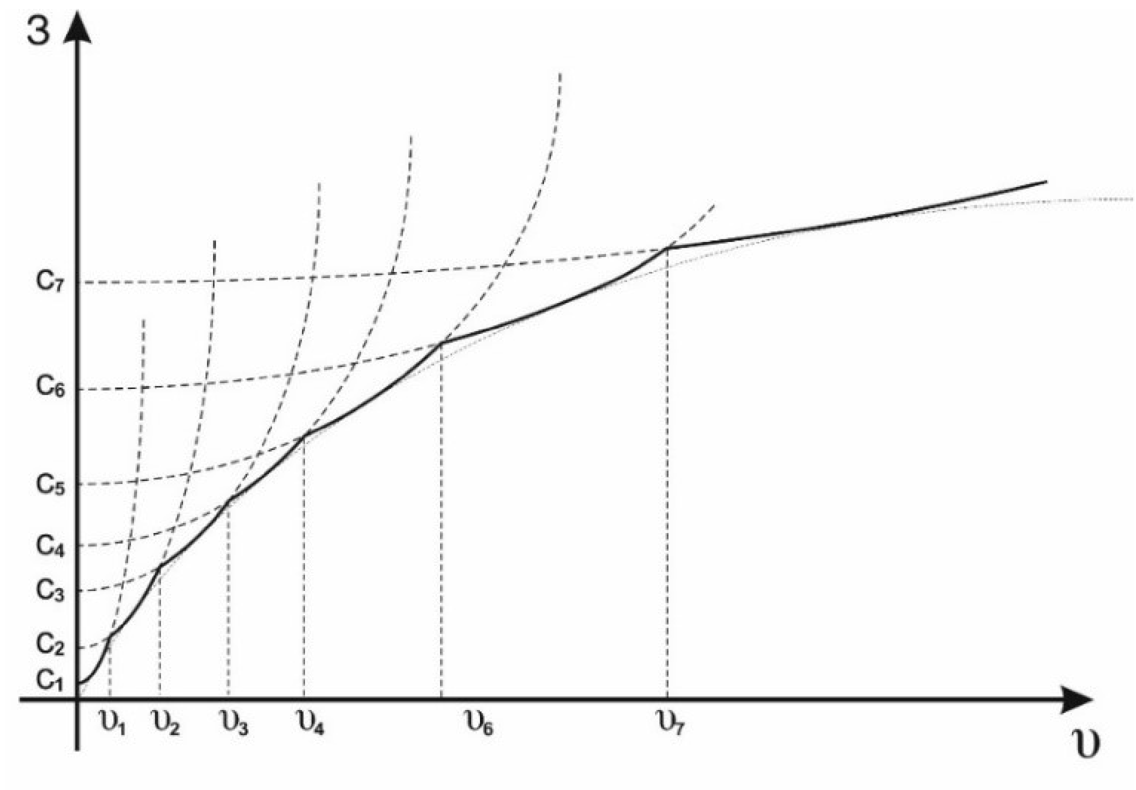

Рисунок. Функция затрат

Список литературы/References

[1] Гилберт Э. Н., Поллак Г. О., "Минимальные деревья Штейнера", *Кибернетический сборник. Новая серия*, 1971, № 8, 19-49, [Gilbert E. N., Pollak G. O. Minimal'nye derev'ya Shteynera. Kiberneticheskiy sbornik. Novaya seriya., no.8, 1971, 19-49 (in Russian)].

[2] Гордеев Э. Н., Тарасцов О. Г., "Задача Штейнера. Обзор", *Дискретная математика*, **5**:2 (1993), 3-28, [Gordeev E. N., Tarastsov O. G. Zadacha Shteynera. Obzor. Diskretnaya matematika. vol. 5, no. 2, 1993, 3-28 (in Russian)].

[3] Кудаев В. Ч., Багов М. А., "Локальное решение сетевой задачи Штейнера", *Доклады Адыгской (Черкесской) Академии наук*, **16**:4 (2014), 9-14, [Kudaev V. Ch., Bagov M. A. Lokal'noe reshenie setevoy zadachi Shteynera. Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Akademii nauk., 2014, vol. 16, no 4., 9-14 (in Russian)].

[4] Кудаев В. Ч., Багов М. А., "Преобразование терминальной сети в сеть Штейнера", *Известия КБНЦ РАН*, 2015, № 6(68), 31-37, [Kudaev V. Ch., Bagov M. A. Preobrazovanie terminal'noy seti v set' Shteynera. Izvestiya KBNTs RAN, no 6(68), 2015, 31-37 (in Russian)].

[5] Меренков А. П., Сеннова Е. В., Сумароков С. В., Сидлер В. Г., Новитский Н. Н., Стенников В. А., Чупин В. Р., *Математическое моделирование и оптимизация систем тепло- водо- нефте- и газоснабжения*, Наука, Новосибирск, 1992, 406 с., [Merenkov A. P., Sennova E. V., Sumarokov S. V., Sidler V. G., Novitskiy N. N., Stennikov V. A., Chupin V. R. Matematicheskoe modelirovanie i optimizatsiya sistem teplovodo- nefte- i gazosnabzheniya. Nauka, Novosibirsk, SO RAN, 1992, 406 p (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Гилберт Э. Н., Поллак Г. О. Минимальные деревья Штейнера // Кибернетический сборник. Новая серия. 1971. вып.8. С. 19-49

[2] Гордеев Э. Н., Тарасцов О. Г. Задача Штейнера. Обзор // Дискретная математика. 1993. Т. 5. вып. 2. С. 3-28

[3] Кудаев В. Ч., Багов М. А. Локальное решение сетевой задачи Штейнера // Доклады Адыгской (Черкесской) Академии наук. 2014. Т.16, №4. С.9-14

[4] Кудаев В. Ч., Багов М. А. Преобразование терминальной сети в сеть Штейнера // Известия КБНЦ РАН.2015. №6(68). С. 31-37

[5] Меренков А. П., Сеннова Е. В., Сумароков С. В., Сидлер В. Г., Новитский Н. Н., Стенников В. А., Чупин В. Р. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло- водо- нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992. 406 с.

Для цитирования: Багов М. А. Задачи проектирования трубопроводной сети Штейнера // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). С. 80-84. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-80-84

For citation: Bagov M. A. Design problems for the Steiner pipe network, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **16**: 4-1, 80-84. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-80-84

Поступила в редакцию / Original article submitted: 24.11.2016