DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-72-79

УДК 517.925.4

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО НЕПРЕРЫВНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РЕГУЛЯРИЗОВАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ СЕГМЕНТНОГО ПОРЯДКА*

Б. И. Эфендиев

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: beslan_efendiev@mail.ru

В данной работе построено фундаментальное решение обыкновенного непрерывного дифференциального уравнения второго порядка с регуляризованными производными сегментного порядка и найдено в явном виде решение задачи Коши в терминах фундаментального решения.

Ключевые слова: задача Коши, непрерывное дифференциальное уравнение, регуляризованная производная сегментного порядка, фундаментальное решение.

MSC 34L99

THE CAUCHY PROBLEM FOR A REGULAR CONTINUOUS DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER WITH REGULARIZED DERIVATIVES OF SEGMENT ORDER

B. I. Efendiev

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia

E-mail: beslan_efendiev@mail.ru

In this work we build a fundamental solution to a regular continuous differential equation of second order with regularized derivatives of segment order and find an explicit solution to Cauchy problem in terms of fundamental solution.

Key words: Cauchy problem, the continuous differential equation regularized derivative segment of the order, the fundamental solution

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00462)

Введение

В области $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$u''(x) + a\partial_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x) + bu'(x) + c\partial_{0x}^{[\gamma,\delta]}u(x) + du(x) = f(x), \tag{1}$$

где

$$\partial_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \partial_{0x}^{s}u(x)ds \tag{2}$$

– регуляризованная производная континуального (сегментного) порядка $[\alpha,\beta]$,

$$\partial_{0x}^{s}u(x) = \frac{1}{\Gamma(n-s)}\int\limits_{0}^{x}\frac{u^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{s-n+1}}$$

– регуляризованная дробная производная Римана-Лиувилля порядка s [1, с. 11], $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $1 < \alpha < \beta < 2$, $0 < \gamma < \delta < 1$, $a,b,c,d - const$.

Оператор

$$D_{0x}^{[\mu,\rho]}u(x) = \int\limits_{\mu}^{\rho} D_{0x}^{s}u(x)ds \tag{3}$$

называется оператором непрерывного интегродифференцирования [1, с. 33] и связан с регуляризованным оператором дифференцирования сегментного порядка (2) соотношением

$$D_{0x}^{[\mu,\rho]}u(x) = \partial_{0x}^{[\mu,\rho]}u(x) + \sum_{k=0}^{n-1}u(0)\frac{1}{x}Vi(k-\rho+1,k-\mu+1,x), \quad n-1<\rho\leq n, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

$$Vi(\mu,\rho,x) = \int\limits_{\mu}^{\rho}\frac{x^s}{\Gamma(s)}ds, \qquad x\geq 0, \quad 0\leq\mu\leq\rho. \tag{5}$$

В работе [2] (см. [3, с. 135]) построен оператор, обращающий оператор (3), выписано решение непрерывного уравнения Абеля и получены аналоги формулы Ньютона-Лейбница. В работах [4] и [5] построено фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка

$$D_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(x) + \lambda u(x) = f(x), \qquad \alpha<\beta, \quad \beta\leq 1$$

разными методами, показана положительность фундаментального решения и решена задача Коши.

Для уравнения (1) с операторами вида (3) построено фундаментальное решение и найдено решение задачи Коши [6].

В данной статье, используя результаты работы [6], построено фундаментальное решение уравнения (1) и выписано решение задачи Коши.

Постановка задачи и методика ее решения

Регулярным решением уравнения (1) в области $]0,l[$ назовем функцию $u = u(x)$, имеющую абсолютно непрерывную на $[0,l]$ производную первого порядка и удовлетворяющую уравнению (1) в области $]0,l[$.

В работе [6] показано, что функция

$$W(x) \equiv W(x;\alpha,\beta,\gamma,\delta) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \nu_n(x) \tag{6}$$

является фундаментальным решением уравнения (1) с операторами дифференцирования Римана-Лиувилля сегментного порядка. Здесь $\nu_0(x) = x$,

$$\nu_n(x) = \nu_{n-1} * \left[a\frac{1}{x}Vi(2-\beta,2-\alpha,x)+b+c\frac{1}{x}Vi(2-\delta,2-\gamma,x)+dx\right], \quad n\in\mathbb{N}, \tag{7}$$

$(g*h)(x) = \int_0^x g(x-t)h(t)dt$ – свертка Лапласа функций $g(x)$ и $h(x)$.

Лемма 1. *Для функций* $Vi(\mu,\rho,x)$, $\nu_n(x)$, $W(x)$ *в положительной полуокрестности нуля справедливы оценки* [6]

$$Vi(\mu,\rho,x) \le 2(\rho-\mu)x^{\mu} \tag{8}$$

$$\nu_n(x) \le \frac{k^n\Gamma^n(2-\beta)}{\Gamma[n(2-\beta)+2]}x^{n(2-\beta)+1}, n = 0,1,2,..., k = const, \tag{9}$$

$$|W(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n\Gamma^n(2-\beta)}{\Gamma[n(2-\beta)+2]}x^{n(2-\beta)+1} = xE_{\frac{1}{2-\beta}}[k\Gamma(2-\beta)x^{2-\beta};2], \tag{10}$$

где $E_\rho(z,\mu)$ – функция типа Миттаг-Леффлера [7, с. 117].

Функцию $g(x,t)$ будем называть *фундаментальным решением* уравнения (1), если при $0<t<x<l$ она как функция переменной x при фиксированном t является решением задачи

$$g_{xx}(x,t)+a\partial_{tx}^{[\alpha,\beta]}g(s,t)+bg_x(x,t)+c\partial_{tx}^{[\gamma,\delta]}g(s,t)+dg(x,t) = -\frac{a}{x-t}Vi(2-\beta,2-\alpha,x-t),$$

$$g(t,t) = 0, \quad g_x(t,t) = 1. \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть* $0<t<x<l$. *Тогда функция* $W(x-t)$, *определенная равенством (6), является фундаментальным решением уравнения (1).*

Доказательство. Замена $y = x-t$ позволяет свести задачу (11) для функции $W(x-t)$ к задаче

$$W''(y)+a\partial_{0y}^{[\alpha,\beta]}W(y)+bW'(y)+c\partial_{0y}^{[\gamma,\delta]}W(y)+dW(y) = -a\frac{1}{y}Vi(2-\beta,2-\alpha,y),$$

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 1$$

или же с учетом формулы (4) к задаче

$$\begin{gathered} W''(y)+aD_{0y}^{[\alpha,\beta]}W(y)+bW'(y)+cD_{0y}^{[\gamma,\delta]}W(y)+dW(y) = 0, \\ W(0) = 0, \quad W'(0) = 1. \end{gathered} \tag{12}$$

В работе [6] доказано, что функция $W(y)$ является решением задачи (12).

Лемма 2. *Функция $W(x-t)$ обладает тем свойством, что по переменной t при $0<t<x<l$ она является решением задачи*

$$g_{tt}(x,t)-aD_{xt}^{[\alpha,\beta]}g(x,s)-bg_t(x,t)+cD_{xt}^{[\gamma,\delta]}g(x,s)+dg(x,t)=0,$$
$$g(x,x)=0, \quad g_t(x,x)=-1. \tag{13}$$

Действительно, в силу замены $y=x-t$ задача (13) эквивалентна задаче (12) для функции $W(x-t)$.

Задача. *Найти регулярное решение $u=u(x)$ уравнения (1) в области $]0,l[$, удовлетворяющее условиям*

$$u(0)=u_0, \quad u'(0)=u_1, \tag{14}$$

где u_0,u_1 – заданные постоянные.

Теорема 2. *Пусть $f(x)\in C]0,l[\cap L[0,l]$. Тогда решение задачи Коши (14) для уравнения (1) существует, единственно и оно имеет вид*

$$u(x)=u_0\Big[W'(x)+aD_{0x}^{[\alpha-1,\beta-1]}W(s)+bW(x)+cD_{0x}^{[\gamma-1,\delta-1]}W(s)\Big]+$$
$$+u_1\Big[W(x)+aD_{0x}^{[\alpha-2,\beta-2]}W(s)\Big]+(W*f)(x). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – регулярное решение уравнения (1). Умножим обе части уравнения (1) на $W(x-t)$, предварительно поменяв переменную x на t и проинтегрируем по переменной t от 0 до x

$$\int_0^x W(x-t)u''(t)dt+a\int_0^x W(x-t)\partial_{0t}^{[\alpha,\beta]}u(s)dt+b\int_0^x W(x-t)u'(t)dt+$$
$$+c\int_0^x W(x-t)\partial_{0t}^{[\gamma,\delta]}u(s)dt+d\int_0^x W(x-t)u(t)dt=\int_0^x W(x-t)f(t)dt. \tag{16}$$

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралам левой части равенства (16) получим

$$1)\int_0^x W(x-t)u''(t)dt=u'(x)W(0)-u'(0)W(x)+u(x)W'(0)-u(0)W'(x)+\int_0^x u(t)W_{tt}(x-t)dt,$$

$$2)\int_0^x W(x-t)\partial_{0t}^{[\alpha,\beta]}u(s)dt=\int_0^x W(x-t)D_{0t}^{[\alpha-2,\beta-2]}u''(s)dt=\int_0^x u''(t)D_{xt}^{[\alpha-2,\beta-2]}W(x-s)dt=$$
$$=u'(x)D_{xx}^{[\alpha-2,\beta-2]}W(x-s)-u'(0)D_{x0}^{[\alpha-2,\beta-2]}W(x-s)+u(x)D_{xx}^{[\alpha-1,\beta-1]}W(x-s)-$$
$$-u(0)D_{x0}^{[\alpha-1,\beta-1]}W(x-s)-\int_0^x u(t)D_{xt}^{[\alpha,\beta]}W(x-s)dt,$$

$$3)\int\limits_0^x W(x-t)u'(t)dt=u(x)W(0)-u(0)W(x)-\int\limits_0^x u(t)W_t(x-t)dt,$$

$$4)\int\limits_0^x W(x-t)\partial_{0t}^{[\gamma,\delta]}u(s)dt=\int\limits_0^x W(x-t)D_{0t}^{[\gamma-1,\delta-1]}u'(s)dt=\int\limits_0^x u'(t)D_{xt}^{[\gamma-1,\delta-1]}W(x-s)dt=$$

$$=u(x)D_{xx}^{[\gamma-1,\delta-1]}W(x-s)-u(0)D_{x0}^{[\gamma-1,\delta-1]}W(x-s)+\int\limits_0^x u(t)D_{xt}^{[\gamma,\delta]}W(x-s)dt.$$

Подставляя 1) – 4) в соотношение (16) вместо интегралов, после преобразования будем иметь

$$\int\limits_0^x u(t)\left[W_{tt}(x-t)-aD_{xt}^{[\alpha,\beta]}W(x-s)-bW_t(x-t)+cD_{xt}^{[\gamma,\delta]}W(x-s)+dW(x-t)\right]dt+$$

$$+u'(x)\left[W(x-t)+aD_{xt}^{[\alpha-2,\beta-2]}W(x-s)\right]_{t=x}-u'(0)\left[W(x)+aD_{x0}^{[\alpha-2,\beta-2]}W(x-s)\right]+$$

$$+u(x)\left[-W_t(x-t)+aD_{xt}^{[\alpha-1,\beta-1]}W(x-s)+bW(x-t)+cD_{xt}^{[\gamma-1,\delta-1]}W(x-s)\right]_{t=x}-$$

$$-u(0)\left[W'(x)+aD_{x0}^{[\alpha-1,\beta-1]}W(x-s)+bW(x)+cD_{x0}^{[\gamma-1,\delta-1]}W(x-s)\right]=(W*f)(x). \quad (17)$$

Учитывая, что

$$W_{tt}(x-t)-aD_{xt}^{[\alpha,\beta]}W(x-s)-bW_t(x-t)+cD_{xt}^{[\gamma,\delta]}W(x-s)+dW(x-t)=0,$$

$$\left[W(x-t)+aD_{xt}^{[\alpha-2,\beta-2]}W(x-s)\right]_{t=x}=0, \quad (18)$$

$$\left[-W_t(x-t)+aD_{xt}^{[\alpha-1,\beta-1]}W(x-s)+bW(x-t)+cD_{xt}^{[\gamma-1,\delta-1]}W(x-s)\right]_{t=x}=1,$$

в силу условий (14) и равенств

$$D_{x0}^{[\alpha-1,\beta-1]}W(x-s)=D_{0x}^{[\alpha-1,\beta-1]}W(s),\quad D_{x0}^{[\gamma-1,\delta-1]}W(x-s)=D_{0x}^{[\gamma-1,\delta-1]}W(s),$$

$$D_{x0}^{[\alpha-2,\beta-2]}W(x-s)=D_{0x}^{[\alpha-2,\beta-2]}W(s),$$

из соотношения (17) получаем формулу (15).

Лемма 3. *Задача (18) эквивалентна задаче (13).*

Действительно, если докажем, что $D_{xt}^{[\alpha-2,\beta-2]}W(x-s)=0$, $D_{xt}^{[\alpha-1,\beta-1]}W(x-s)=0$ и $D_{xt}^{[\gamma-1,\delta-1]}W(x-s)=0$ при $t=x$, то задача (18) будет эквивалентна задаче (13). В силу замены $y=x-t$

$$D_{xt}^{[\alpha-2,\beta-2]}W(x-s)=D_{0y}^{[\alpha-2,\beta-2]}W(z)=\int\limits_{\alpha-2}^{\beta-2}\frac{ds}{\Gamma(-s)}\int\limits_0^y W(z)(y-z)^{-s-1}dz=$$

$$= \int\limits_0^y W(z) \int\limits_{2-\beta}^{2-\alpha} \frac{(y-z)^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} d\eta dz = \frac{1}{y} Vi(2-\beta, 2-\alpha, y) * W$$

Учитывая неравенства (9) и (11) при $y=0$ выражение $\frac{1}{y}Vi(2-\beta,2-\alpha,y)*W$ равно нулю, т.е. при $t=x$, $D_{xt}^{[\alpha-2,\beta-2]}W(x-s)=0$.

Аналогично имеем, что

$$D_{xt}^{[\alpha-1,\beta-1]}W(x-s)\Big|_{t=x} = \left[\frac{1}{y}Vi(2-\beta,2-\alpha,y)*W'\right]_{y=0} = 0,$$

$$D_{xt}^{[\gamma-1,\delta-1]}W(x-s)\Big|_{t=x} = \left[\frac{1}{y}Vi(2-\delta,2-\gamma,y)*W'\right]_{y=0} = 0.$$

Покажем, что функция $u(x)$, определяемая формулой (15), является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (14).

Найдем производные, входящие в уравнение (1), от функции $u(x)$. В силу второго и третьего равенств (12), из формулы (15) имеем

$$u'(x) = u_0\left[W''(x) + aD_{0x}^{[\alpha,\beta]}W(s) + bW'(x) + cD_{0x}^{[\gamma,\delta]}W(s)\right] +$$

$$+u_1\left[W'(x) + aD_{0x}^{[\alpha-1,\beta-1]}W(s)\right] + (W'*f)(x), \tag{19}$$

$$u''(x) = u_0\frac{d}{dx}\left[W''(x) + aD_{0x}^{[\alpha,\beta]}W(s) + bW'(x) + cD_{0x}^{[\gamma,\delta]}W(s)\right] +$$

$$+u_1\left[W''(x) + aD_{0x}^{[\alpha,\beta]}W(s)\right] + (W''*f)(x) + f(x), \tag{20}$$

$$\partial_{0x}^{[\gamma,\delta]}u(y) = u_0 D_{0x}^{[\gamma-1,\delta-1]}\left[W''(y) + aD_{0y}^{[\alpha,\beta]}W(s) + bW'(y) + cD_{0y}^{[\gamma,\delta]}W(s)\right] +$$

$$+u_1 D_{0x}^{[\gamma-1,\delta-1]}\left[W'(y) + aD_{0y}^{[\alpha-1,\beta-1]}W(s)\right] + D_{0x}^{[\gamma-1,\delta-1]}(W'*f)(y), \tag{21}$$

$$\partial_{0x}^{[\alpha,\beta]}u(y) = u_0 D_{0x}^{[\alpha-1,\beta-1]}\left[W''(y) + aD_{0y}^{[\alpha,\beta]}W(s) + bW'(y) + cD_{0y}^{[\gamma,\delta]}W(s)\right] +$$

$$+u_1 D_{0x}^{[\alpha-2,\beta-2]}\left[W''(y) + aD_{0y}^{[\alpha,\beta]}W(s)\right] + D_{0x}^{[\alpha-2,\beta-2]}(W''*f)(y) + D_{0x}^{[\alpha-2,\beta-2]}f(y). \tag{22}$$

Подставляя соотношения (15), (19) – (22) в уравнение (1), в силу теоремы 1, получаем, что функция, определяемая формулой (15), действительно является решением уравнения (1).

Если в равенствах (15) и (19) устремить x к 0 и учесть, что $W(0)=0$, $W'(0)=1$, то получатся условия (14).

Перепишем формулу (20) и учитывая первое равенство (12)

$$u''(x) = u_0\frac{d}{dx}\left[W''(x) + aD_{0x}^{[\alpha,\beta]}W(s) + bW'(x) + cD_{0x}^{[\gamma,\delta]}W(s)\right] +$$

$$+u_1\left[W''(x) + aD_{0x}^{[\alpha,\beta]}W(s)\right] + (W''*f)(x) + f(x) =$$

$$= -u_0 dW(x) - u_1\left[bW'(x) + cD_{0x}^{[\gamma,\delta]}W(s) + dW(x)\right] + (W''*f)(x) + f(x). \tag{23}$$

Так как все функции, входящие в правую часть соотношения (23), суммируемы на $[0,l]$, то $u(x) \in AC^2[0,l]$.

Список литературы/References

[1] Нахушев А.М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с., [Nahushev A.M., Drobnoe ischislenie i ego primenenie, Fizmatlit, M., 2003, 272 p. (in Russian)].

[2] Псху А.В., "Об операторах типа свертки и их приложение к теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **5**:2 (2001), 49–55, [Pshu A.V. Ob operatorah tipa svertki i ih prilozhenie k teorii operatora integrodifferencirovanija kontinual'nogo porjadka, Doklady Adygskoj (Cherkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk, 5:2 (2001), 49–55 (in Russian)].

[3] Псху А. В., "К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка", *Дифференц. уравнения*, **40**:1 (2004), 120–127, [Pshu A. V. K teorii operatora integro-differencirovanija kontinual'nogo porjadka, Differenc. uravnenija, 40:1 (2004), 120–127 (in Russian)].

[4] Псху А. В., "Задача Коши для дифференциального уравнения континуального порядка", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **7**:2 (2005), 45–49, [Pshu A.V. Zadacha Koshi dlja differencial'nogo uravnenija kontinual'nogo porjadka, Doklady Adygskoj (Cherkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk, 7:2 (2005), 45–49 (in Russian)].

[5] Псху А. В., "Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **9**:1 (2007), 73–78, [Pshu A. V. Fundamental'noe reshenie obyknovennogo differencial'nogo uravnenija kontinual'nogo porjadka, Doklady Adygskoj (Cherkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk, 9:1 (2007), 73–78 (in Russian)].

[6] Эфендиев Б. И., "Начальная задача для обыкновенного непрерывного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:2 (2015), 82–86, [Jefendiev B. I. Nachal'naja zadacha dlja obyknovennogo nepreryvnogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka s postojannymi kojefficientami, Doklady Adygskoj (Cherkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk, 17:2 (2015), 82–86 (in Russian)].

[7] Джрбашян М.М., *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966, 672 с., [Dzhrbashjan M. M., Integral'nye preobrazovanija i predstavlenija funkcij v kompleksnoj oblasti, Nauka, Moskva, 1966, 672 p. (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М., Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[2] Псху А. В. Об операторах типа свертки и их приложение к теории оператора интегродифференцирования континуального порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2001. Т. 5. №2. 49–55

[3] Псху А. В. К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. №1. С. 120–127.

[4] Псху А. В. Задача Коши для дифференциального уравнения континуального порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2005. Т. 7. №2. С. 45–49

[5] Псху А. В., Фундаментальное решение обыкновенного дифференциального уравнения континуального порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2007. Т. 9. №1. С. 73–78

[6] Эфендиев Б. И. Начальная задача для обыкновенного непрерывного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. №2. С. 82–86

[7] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

Для цитирования: Эфендиев Б. И. Задача Коши для обыкновенного непрерывного дифференциального уравнения второго порядка с регуляризованными производными сегментного порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). C. 72-79. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-72-79

For citation: Efendiev B. I. The Cauchy problem for a regular continuous differential equation of second order with regularized derivatives of segment order, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **16**: 4-1, 72-79. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-72-79

Поступила в редакцию / Original article submitted: 16.11.2016