Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). С. 66-71. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-66-71

УДК 517.954

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ЗАДАЧИ КАТТАБРИГА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. М. Шхагапсоев

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: sh2ps@yandex.ru

Методом энергетических неравенств получена априорная оценка решения задачи Каттабрига для уравнения с кратными характеристиками.

Ключевые слова: дробная производная по Капуто, априорная оценка краевых задач, уравнение с кратными характеристиками, метод интегралов энергии.

MSC 35M13

A PRIORI EVALUATION OF THE TASK OF CATTABRIGA FOR THE GENERALIZED THIRD-ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

A. M. Shkhagapsoev

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, KBR, Nalchik, st. Shortanova 89a, Russia

E-mail: sh2ps@yandex.ru

The method of energy inequalities obtained a priori estimate of the solution of the problem of Cattabriga for the equation with multiple characteristics.

Key words: Caputo Fractional derivative; a priori estimate of the boundary-value problems; equations with multiple characteristics; method of energy integrals.

Введение

Применения уравнений с частными производными дробного порядка при описании физических и химических процессов, протекающих в средах с фрактальной структурой, а так же при моделировании биологических явлений подробно описано в [1]. Работа [2] посвящена вопросам обобщения операций дифференцирования и интегрирования с целых порядков на дробные, а также приложениями теории дробного интегрирования и дифференцирования. Уравнение третьего порядка, с кратными характеристиками содержащее производную первого порядка по времени

$$u_y = u_{xxx} + f(x,y),$$

впервые было рассмотрено в работах [3] – [5]. В работе [6] построены фундаментальные решения с применением преобразования Лапласа и получены оценки этих решений и их производных. Полученные в них результаты были обобщены для уравнения (2n-1)-го порядка соответственно в работах [7] – [9].

Для уравнения

$$u_y = u_{xxx} + a_1(x,y)u_x + a_2(x,y)u + f(x,y),$$

в работах [10] – [12] рассмотрены как локальные так нелокальные краевые задачи и получены решения в интегральной форме. А в монографии [13] доказано единственность решения этого уравнения и построена функция Грина краевой задачи Каттабрига.

Постановка задачи Каттабрига

В прямоугольнике $\overline{D} = \{(x,y) : 0 \le x \le r, 0 \le y \le h\ \}$ рассмотрим краевую задачу

$$\partial^{\alpha}_{0y} = \lambda_1(y)u_{xxx} + \lambda_2(y)u_x + \lambda_3(y)u + f(x,y), 0 < x < r, 0 < y \le h \tag{1}$$

$$u(0,y) = 0, u(r,y) = 0, u_x(0,y) = 0, 0 \le y \le h \tag{2}$$

$$u(x,0) = \tau(x), 0 \le x \le r \tag{3}$$

где

$$\partial^{\alpha}_{0y}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^y \frac{u_\tau(x,\tau)}{(y-\tau)^{\alpha}} d\tau$$

– дробная производная Капуто порядка α, $0 < \alpha < 1$ [14], $\lambda_1(y)$, $\lambda_2(y)$, $\lambda_3(y)$ заданные известные функции, зависящие только от переменной y из класса $C(\overline{D})$.

В дальнейшем будем предполагать существование решения $u(x,y) \in C^{3,1}(\overline{D})$ задачи (1) – (3), где $C^{3,1}(\overline{D})$ – класс непрерывных вместе со своими частными производными третьего порядка по x ипервого порядка по y на $\overline{D}$.

Введем следующие обозначения:

$\|u\|_0^2 = \int\limits_0^r u^2(x,y)dx$, $D^{\alpha}_{0y}u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^y \frac{u(x,\tau)d\tau}{(y-\tau)^{1-\alpha}}$ – дробный интеграл Риммана-Лиувилля порядка α [1].

Теорема.

Если $\lambda_1(y) > 0$ и $f(x,y) \in \overline{D}$ то для решения $u(x,y)$ задачи (1) – (3) справедлива априорная оценка

$$\|u\|_0^2 \leq E_\alpha(c_1 t^\alpha)\|\tau\|_0^2 + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}(c_1 t^\alpha)D_{0y}^\alpha\|f\|_0^2, \tag{4}$$

где $c_1 = 1 + 2\lambda_3(y)$, $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha+1)}$, $E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha+\mu)}$ – функции Миттаг-Леффлера.

Доказательство.

Умножая (1) на $u = u(x,y)$ и интегрируя по x от 0 до r, получим:

$$\int_0^r u\partial_{0y}^\alpha u dx = \lambda_1(y)\int_0^r ((uu_{xx})_x - u_x u_{xx})dx + \lambda_2(y)\int_0^r \left(\frac{u^2}{2}\right)_x dx + \lambda_3(y)\int_0^r u^2 dx + \int_0^r uf dx. \tag{5}$$

После преобразований, тождество (5) примет вид

$$\int_0^r u(x,y)\partial_{0y}^\alpha u(x,y)dx = \lambda_1(y)\left(u(r,y)u_{xx}(r,y) - u(0,y)u_{xx}(0,y) - \frac{u_x^2(r,y) - u_x^2(0,y)}{2}\right)$$

$$+\lambda_2(y)\left(\frac{u^2(r,y) - u^2(0,y)}{2}\right) + \lambda_3(y)\|u\|_0^2 + \int_0^r u(x,y)f(x,y)dx. \tag{6}$$

Учитывая однородные условия (2), равенство (6) перепмшется в виде

$$\int_0^r u(x,y)\partial_{0y}^\alpha u(x,y)dx = -\frac{\lambda_1(y)}{2}u_x^2(r,y) + \lambda_3(y)\|u\|_0^2 + \int_0^r uf dx. \tag{7}$$

В силу Леммы 1 из [15] справедливо следующее неравенство

$$\int_0^r u(x,y)\partial_{0y}^\alpha u(x,y)dx \geqslant \frac{1}{2}\partial_{0y}^\alpha\|u\|_0^2. \tag{8}$$

С учетом (8) соотношение (7) примет вид

$$\frac{1}{2}\partial_{0y}^\alpha\|u\|_0^2 \geqslant -\frac{\lambda_1(y)}{2}u_x^2(r,y) + \lambda_3(y)\|u\|_0^2 + \int_0^r uf dx. \tag{9}$$

В силу известного неравенства

$$\int_0^r u(x,y)f(x,y)dx \geqslant \varepsilon\|u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2,$$

где ε произвольное сколь угодно малое положительное число, выражение (9) перепишется в виде:

$$\frac{1}{2}\partial_{0y}^{\alpha}\|u\|_0^2+\frac{\lambda_1(y)}{2}u_x^2(r,y)-(\varepsilon+\lambda_3(y))\|u\|_0^2\geqslant\frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_{0.}^2 \tag{10}$$

Учитывая условия теоремы и обозначая $\varepsilon=\frac{1}{2}$, $c_1\geq 1+2\lambda_3(y)$, что всегда возможно в силу $\lambda_1(y)\in C(\overline{D})$, формула (10) примет вид

$$\partial_{0y}^{\alpha}\|u\|_0^2\geq c_1\|u\|_0^2+\|f\|_{0.}^2 \tag{11}$$

Применив к обеим частям неравенства (11) оператор дробного интегрирования D_{0y}^{α} и на основании Леммы 2 из [15] приходим к априорной оценке (4).

Заключение

Из априорной оценки (4) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1)–(3) от входных данных, а так же существование слабого решения.

Список литературы/References

[1] Нахушев А.М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с., [Nahushev A.M., Drobnoe ischislenie i ego primenenie, M.: Fizmatlit, 2003, 272 p. (in Russian)].

[2] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Минск: Наука и техника, 1987, 668 с., [Nahushev A.M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie, M.: Fizmatlit, 2003, 272 p. (in Russian)].

[3] Block H., “Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples”, *Ark. mat., astron., fys*, **7**:13 (1912), 1–34.

[4] Del Vecchio E., “Sulle equazioni $Z_{xxx}-Z_y+\varphi_1(x,y)=0$, $Z_{xxx}-Z_{yy}+\varphi_1(x,y)=0$”, *Mem. Real acad. cienc. Torino.*, **66**:2 (1915), 1–41.

[5] Del Vecchio E., “Sulle deux problems d’integration pour las equazions paraboliques $Z_{xxx}-Z_y=0$, $Z_{xxx}-Z_{yy}=0$”, *Ark. mat., astron., fys.*, **11** (1916), 32–34.

[6] Cattabriga L., “Un problema al kontorno per una equazione di ordine dispary”, *Analli della scuola normale superior di pisa fis e mat*, **3**:2 (1959), 163–169.

[7] Cattabriga L., “Potenzialli di linia edi domino per equation nom paraboliche in olue variabli a caracteristiche multiple”, *Rendi del Som. Mat. della Univ. di Padova*, **3** (1961), 1–45.

[8] Абдиназаров С., “О фундаментальных решениях линейных уравнений с кратными характеристиками высокого порядка”, *Известие АН УзССР, серия физ. мат. наук*, 1989, 3 – 15, [Abdinazarov S. O fundamental’nyh reshenijah linejnyh uravnenij s kratnymi harakteristikami vysokogo porjadka, Izvestie AN UzSSR, serija fiz. mat. nauk. 1989, No. 3., 3 – 15. (in Russian)].

[9] Джураев Т. Д., “К теории уравнений нечетного порядка с кратными характеристиками”, *Узб. мат. жур.*, 1991, № 1, 21 – 31, [Dzhuraev T. D. K teorii uravnenij nechetnogo porjadka s kratnymi harakteristikami, Uzb. mat. zhur., 1991, No.1., 21 – 31 (in Russian)].

[10] Иргашев Ю., *Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения*, ФАН, Ташкент, 1976, [Irgashev Ju. Nekotorye kraevye zadachi dlja uravnenij tret’ego porjadka s kratnymi harakteristikami , Kraevye zadachi dlja differencial’nyh uravnenij i ih prilozhenija. Tashkent, FAN, 1976., 17 – 27 (in Russian)].

[11] Абдиназаров С., Собиров З. А., “О фундаментальных решениях уравнения с кратными характеристиками третьего порядка в многомерном пространстве.”, «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики» (Труды межд. научн. конф), 2004, 12 – 13, [Abdinazarov S., Sobirov Z.A. O fundamental’nyh reshenijah uravnenija s kratnymi harakteristikami tret’ego porjadka v

mnogomernom prostranstve, Trudy mezhd. nauchn. konf. «Differencial'nye uravnenija s chastnymi proizvodnymi i rodstvennye problemy analiza i informatiki». Tashkent, 2004., 12 – 13. (in Russian)].

[12] Абдиназаров С., “Решение задачи Коши для вырождающихся уравнений высокого нечетного порядка с кратными характеристиками в многомерном пространстве”, *Uzbek Mathematical Journal*, 2005, № 3, 11 – 16, [Abdinazarov S. Reshenie zadachi koshi dlja vyrozhdajushhihsja uravnenij vysokogo nechetnogo porjadka s kratnymi harakteristikami v mnogomernom prostranstve”, Uzbek Mathematical Journal, 2005, №3, 11 – 16 (in Russian)].

[13] Джураев Т. Д., *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.*, ФАН, Ташкент, 1979, 236 с., [Dzhuraev T. D. Kraevye zadachi dlja uravnenij smeshannogo i smeshanno-sostovnogo tipov, Tashkent: FAN. 1979., 236 p. (in Russian)].

[14] Caputo M., *Elasticita e Dissipazione*, Bologna, 1969.

[15] Алиханов А. А., “Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка”, *Дифференц. уравнения*, **46**:5 (2010), 658 – 664, [Alihanov A. A. Apriornye ocenki reshenij kraevyh zadach dlja uravnenij drobnogo porjadka, Differenc. uravnenija. 2010. T. 46, №5., 658 – 664 (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[2] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника,1987. 668 с.

[3] Block H. Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples // Ark. mat., astron., fys. 1912. vol. 7. issue 13. pp. 1–34

[4] Del Vecchio E. Sulle equazioni $Z_{xxx} - Z_y + \varphi_1(x,y) = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} + \varphi_1(x,y) = 0$ // Mem. Real acad. cienc. Torino. 1915. vol. 66, no 2. pp. 1–41

[5] Del Vecchio E. Sulle deux problems d'integration pour las equazions paraboliques $Z_{xxx} - Z_y = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} = 0$ // Ark. mat., astron., fys. 1916. vol. 11. C. 32–34

[6] Cattabriga L. Un problema al kontorno per una equazione di ordine dispary // Analli della scuola normale superior di pisa fis e mat. 1959. vol. 3. no 2. pp. 163–169

[7] Cattabriga L. Potenzialli di linia edi domino per equation nom paraboliche in olue variabli a caracteristiche multiple // Rendi del Som. Mat. della Univ. di Padova. 1961. vol. 3. pp. 1–45

[8] Абдиназаров С. О фундаментальных решениях линейных уравнений с кратными характеристиками высокого порядка // Известие АН УзССР, серия физ. мат. наук. 1989. № 3. С. 3 – 15

[9] Джураев Т. Д. К теории уравнений нечетного порядка с кратными характеристиками // Узб. мат. жур.1991. no 1. С. 21 – 31

[10] Иргашев Ю. Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения. Ташкент: ФАН, 1976. С. 17 – 27

[11] Абдиназаров С., Собиров З. А. О фундаментальных решениях уравнения с кратными характеристиками третьего порядка в многомерном пространстве // «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». Труды межд. научн. конф. Ташкент: 2004. С. 12 – 13

[12] Абдиназаров С. Решение задачи Коши для вырождающихся уравнений высокого нечетного порядка с кратными характеристиками в многомерном пространстве // Uzbek Mathematical Journal. 2005. №3. С. 11 – 16

[13] Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-состовного типов. Ташкент: ФАН, 1979. 236 с.

[14] Caputo M. Elasticita e Dissipazione. Bologna: 1969

[15] Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. №5. С. 658 – 664

Для цитирования: Шхагапсоев А. М. Априорная оценка задачи Каттабрига для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). C. 66-71. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-66-71

For citation: Shkhagapsoev A. M. A priori evaluation of the task of Cattabriga for the generalized third-order equation with multiple characteristics, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **16**: 4-1, 66-71. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-66-71

Поступила в редакцию / Original article submitted: 28.11.2016