Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). C. 56-65. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-56-65

УДК 517.95 + 51-7

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

К. У. Хубиев

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А
E-mail: khubiev_math@mail.ru

В явном виде выписано решение задачи Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа второго порядка, предложенного в качестве математической модели уравнения Аллера при определенных условиях.

Ключевые слова: Математическая модель уравнения, нагруженное уравнение, уравнение Аллера, задача Гурса.

MSC 34L99

ON MATHEMATICAL MODELS OF THE ALLER EQUATION

K. U. Khubiev

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia
E-mail: khubiev_math@mail.ru

The solution to the Goursat problem is written out explicitly for a hyperbolic second-order loaded equation, proposed as a mathematical model of Aller equation under certain conditions.

Key words: Key words: equation mathematic model, loaded equation, Aller equation, Goursat problem.

Введение

Уравнение Аллера

$$u_y = (au_x + bu_{xy})_x, \tag{1}$$

является уравнением гиперболического типа, хотя его принято называть уравнением псевдопараболического типа. Уравнение Аллера находит многочисленные применения при математическом моделировании различных физических и биологических процессов [1, с. 261], [2]. Изучению псевдопараболических уравнений и уравнения Аллера, в частности, посвящено много работ, например, [3] - [10].

Выражение $\Pi(x,y) = au_x + bu_{xy}$, как правило, интерпретируется как поток процесса, протекающего в одномерной среде $0 \leq x \leq l$ во все моменты времени y от начального $y = 0$ до расчетного $y = T$. Если известен поток $\Pi(0,y) = f(y)$ в точке $x = 0$ для любого момента времени $y \in [0,T]$, то уравнение (1) переписывается в виде [11], [1, с. 262], [12, с. 59]:

$$bu_{xy} + au_x = \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x u(\xi,y)d\xi + f(y). \tag{2}$$

Одним из эффективных методов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений является предложенный А.М. Нахушевым в работе [13] метод редукции к нагруженным интегро-дифференциальным уравнениям [14]. В связи с этим вызывает интерес постановка и исследование краевых задач для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений.

Локальные и нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений параболического типа с интегральным усреднением рассматривались в работах многих авторов (см., например, [12], [15]-[18] и библиографию там).

Исследованию уравнений гиперболического типа вида (2) посвящено меньше работ. В [19] в области $Q = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ для существенно нагруженного уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - b(x,t)\int\limits_0^T (T-t)u_{xx}(x,\tau)d\tau = c(x,t)$$

доказано существование и единственность решения начально-краевой задачи, получены априорные оценки для решения.

В работе [11] в области $\Omega = \{z | 0 < x < l, 0 < y < T\}$ для уравнения, частным случаем которого является уравнение (2),

$$Lu = a(z)\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^y \alpha(z,\eta)u(x,\eta)d\eta + b(z)\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x \beta(z,\xi)u(\xi,y)d\xi + f(z),$$

где $Lu = u_{xy} + A(z)u_x + B(z)u_y + C(z)u$, доказаны существование и единственность решения задачи Гурса и нелокальной краевой задачи. Там же показано, что линеаризованное уравнение Аллера можно переписать в виде (2), доказана однозначная разрешимость задачи Гурса для нагруженного гиперболического уравнения с характеристическим вырождением порядка при $x = 0$:

$$x(u_{xy} + \lambda u_x) = \mu\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x \xi u(\xi,y)d\xi.$$

В работе [20] получены условия однозначной разрешимости задачи Гурса для нагруженного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\beta'}{y-x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\beta}{y-x}\frac{\partial u}{\partial y}=-(y-x)^{\mu}B_1u(x,y),$$

в области $\Omega=\{z:0<x<y<l=const\}$, где $\beta,\beta',\mu=const$, $\beta+\beta'<1$, $\beta<1$, $\beta'<1$, $\mu>-2=const$,

$$B_1u(x,y)=a(z)\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_y^l \alpha(z,\eta)u(x,\eta)d\eta+b(z)\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^x \gamma(z,\xi)u(\xi,y)d\xi+\int\limits_0^x d\xi\int\limits_y^l c(z,\zeta)u(\zeta)d\eta.$$

В [12, с. 34] для модельного нагруженного уравнения гиперболического типа

$$u_{xy}=\lambda\Big[\int\limits_0^x u(\xi,x_0)d\xi+\int\limits_0^y u(x_0,\eta)d\eta\Big]$$

выписан спектр однородной задачи Гурса. Для уравнения (2) при $a=0$ выписано решение задачи Гурса в явном виде [12, с. 65].

В работах [21], [22] рассмотрены математические модели нагруженного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа как с характеристическим, так и с нехарактеристическим изменением типа, исследована смешанная краевая задача для уравнения плоской волны в прямоугольной плоскости. Для предложенных в качестве моделей уравнений смешанного тип были исследованы краевые задачи, выписаны решения задач в явном виде.

В данной работе в качестве математической модели уравнения Аллера в случае, когда известен поток $au_x(0,y)+bu_{xy}(0,y)=f(y)$, рассматривается уравнение (2), которое является нагруженным уравнением гиперболического типа. Для уравнения (2) при $b\neq 0$ выписано решение задачи Гурса в явном виде.

Постановка задачи

Задача. *Найти в области* $\Omega=\{(x,y):0<x<l,\ 0<y<T\}$ *решение* $u(x,y)$ *уравнения* (2) *из класса* $C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, *удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le l, \tag{3}$$

$$u(0,y)=\varphi_0(y),\ 0\le y\le T, \tag{4}$$

причем $\tau(0)=\varphi_0(0)$.

Основной результат

Справедлива следующая

Теорема.

Пусть $b \neq 0$, $\tau(x) \in C[0,l] \cap C^2]0,l[$, $\varphi_0(y) \in C[0,T] \cap C^2]0,T[$. *Тогда единственное решение задачи* (3)-(4) *для уравнения* (2) *представимо в виде*

$$u(x,y) = \gamma(x,y) + \int_0^x \gamma(\xi,y) w_x(x-\xi,0)d\xi + \int_0^y \gamma(x,\eta) w_y(0,y-\eta)d\eta +$$

$$+ \int_0^x \int_0^y \gamma(\xi,\eta) w_{xy}(x-\xi,y-\eta)d\eta d\xi, \qquad (5)$$

где:

$$\gamma(x,y) = \tau(x) - \tau(0) + \varphi_0(y) - \int_0^x (x-\xi)\tau(\xi)d\xi - \mu \int_0^y \varphi_0(\eta)d\eta + x \int_0^y f(\eta)d\eta, \qquad (6)$$

$$w(x,y) = \int_0^\infty e^{-t}\phi(2,1;tx^2)\phi(1,1;\mu ty)dt, \qquad (7)$$

$\phi(p,q;z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!\Gamma(pk+q)}$, $p > -1$ - *функция Райта* [23, с. 23], $\mu = -\dfrac{a}{b}$.

Доказательство теоремы

Обозначая через $\mu = -\dfrac{a}{b}$, $\quad h(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\int_0^x u(\xi,y)d\xi + f(y)$, из (2) получим

$$u_{xy} - \mu u_x = h(x,y). \qquad (8)$$

Интегрируя уравнение (8) по переменной y от 0 до y, получаем:

$$u_x(x,y) - u_x(x,0) - \mu \int_0^y u_x(x,\eta)d\eta = \int_0^y h(x,\eta)d\eta, \qquad (9)$$

где

$$\int_0^y h(x,\eta)d\eta = \int_0^y \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^x u(\xi,\eta)d\xi + f(\eta) \right\} d\eta = \int_0^x \Big\{ u(\xi,y) - u(\xi,0) \Big\} d\xi + \int_0^y f(\eta)d\eta.$$

Интегрируя теперь равенство (9) по переменной x от 0 до x, находим

$$u(x,y) - u(0,y) - u(x,0) + u(0,0) - \mu \int_0^y u(x,\eta)d\eta + \mu \int_0^y u(0,\eta)d\eta =$$

$$= \int_0^x (x-\xi)u(\xi,y)d\xi - \int_0^x (x-\xi)u(\xi,0)d\xi + x\int_0^y f(\eta)d\eta,$$

откуда, используя обозначение (6), получим уравнение

$$u(x,y) - \int_0^x (x-\xi)u(\xi,y)d\xi - \mu \int_0^y u(x,\eta)d\eta = \gamma(x,y). \tag{10}$$

Уравнение (10) является двумерным интегральным уравнением Абеля второго рода и разрешимо единственным образом. Используя обозначение оператора дробного интегродифференцирования D_{0y}^{α} [1, с. 28], перепишем уравнение (10) в виде

$$Lu = u - D_{0x}^{-2}u - \mu D_{0y}^{-1}u = \gamma. \tag{11}$$

В общем случае уравнение (11) исследовано в [24].

Введем в рассмотрение функцию (7):

$$w(x,y) = \int_0^\infty e^{-t}\phi(2,1;tx^2)\phi(1,1;\mu ty)dt,$$

где

$$\phi(2,1;tx^2) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(tx^2)^k}{k!(2k)!}, \quad \phi(1,1;\mu ty) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(\mu ty)^k}{k!k!}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(p,q;t) = \phi(p,q+p;t), \tag{12}$$

$$D_{0z}^{-\varepsilon} z^{q-1}\phi(p,q;tz^p) = z^{q+\varepsilon-1}\phi(p,q+\varepsilon;tz^p), \quad q>0,$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - D_{0x}^{-2}\Big)\phi(2,1;tx^2) = 0, \quad \Big(\frac{\partial}{\partial t} - \mu D_{0y}^{-1}\Big)\phi(1,1;\mu ty) = 0,$$

имеем

$$-D_{0x}^{-2}\phi(2,1;tx^2)\cdot\phi(1,1;\mu ty) - \mu\phi(2,1;tx^2)\cdot D_{0y}^{-1}\phi(1,1;\mu ty) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\phi(2,1;tx^2)\phi(1,1;\mu ty)\Big).$$

Отсюда получаем

$$Lw = \int_0^\infty e^{-t}\Big[\phi(2,1;tx^2)\phi(1,1;\mu ty) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\phi(2,1;tx^2)\phi(1,1;\mu ty)\Big)\Big]dt =$$

$$-\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\Big[e^{-t}\phi(2,1;tx^2)\phi(1,1;\mu ty)\Big]dt = 1.$$

Рассмотрим двумерную свертку Лапласа интегрируемых функций $\gamma(x,y)$ и $w(x,y)$ [25]:

$$\gamma(x,y) * w(x,y) = \int_0^x \int_0^y \gamma(\xi,\eta)w(x-\xi,y-\eta)d\eta d\xi.$$

Воспользовавшись свойствами свертки, имеем

$$\gamma * w = Lu * w = u * Lw = u * 1 = \int_0^x \int_0^y u(\xi,\eta)d\eta d\xi,$$

откуда, после дифференцирования, получаем решение уравнения (11) в виде

$$u(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Big(\gamma * w\Big)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int\limits_0^x\int\limits_0^y \gamma(\xi,\eta)w(x-\xi,y-\eta)d\eta d\xi=$$

$$=\gamma(x,y)w(0,0)+\int\limits_0^x \gamma(\xi,y)w_x(x-\xi,0)d\xi+\int\limits_0^y \gamma(x,\eta)w_y(0,y-\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^y \gamma(\xi,\eta)w_{xy}(x-\xi,y-\eta)d\eta d\xi.$$

Принимая во внимание, что $\phi(p,q;0)=\dfrac{1}{\Gamma(q)}$, и, следовательно, $\phi(p,1;0)=1$, получаем

$$w(0,0)=\int\limits_0^\infty e^{-t}\phi(2,1;0)\phi(1,1;0)dt=\int\limits_0^\infty e^{-t}dt=1,$$

откуда следует формула (5):

$$u(x,y)=\gamma(x,y)+\int\limits_0^x \gamma(\xi,y)w_x(x-\xi,0)d\xi+\int\limits_0^y \gamma(x,\eta)w_y(0,y-\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^y \gamma(\xi,\eta)w_{xy}(x-\xi,y-\eta)d\eta d\xi.$$

Таким образом, единственное решение задачи (2) - (4) задается формулой (5). Теорема доказана.

Заметим, что формула (5) может быть преобразована в более удобный в некоторых случаях вид. Действительно, с учетом формулы (12) и принимая во внимание, что $\int\limits_0^\infty e^{-t}t^k dt=k!$, имеем

$$w_x(x,y)=\int\limits_0^\infty e^{-t}\frac{\partial}{\partial x}\phi(2,1;tx^2)\phi(1,1;\mu ty)dt=2x\int\limits_0^\infty te^{-t}\phi(2,3;tx^2)\phi(1,1;\mu ty)dt,$$

$$w_x(x-\xi,0)=2(x-\xi)\int\limits_0^\infty te^{-t}\phi(2,3;t[x-\xi]^2)\phi(1,1;0)dt=$$

$$=2(x-\xi)\int\limits_0^\infty te^{-t}\phi(2,3;t[x-\xi]^2)dt=2(x-\xi)\int\limits_0^\infty te^{-t}\sum_{k=0}^\infty\frac{(t[x-\xi]^2)^k}{k!\Gamma(2k+3)}dt=$$

$$=2(x-\xi)\sum_{k=0}^\infty\frac{(x-\xi)^{2k}}{k!(2k+2)!}\int\limits_0^\infty t^{k+1}e^{-t}dt=\sum_{k=0}^\infty\frac{2(k+1)!(x-\xi)^{2k+1}}{k!(2k+2)!}=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{sh}(x-\xi),$$

и, аналогично,

$$w_y(0, y-\eta) = \mu e^{\mu(y-\eta)}.$$

Таким образом, формулу (5) можно переписать в виде

$$u(x,y) = \gamma(x,y) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-\xi)\gamma(\xi,y)d\xi + \int_0^y \mu e^{\mu(y-\eta)}\gamma(x,\eta)d\eta +$$

$$+ \int_0^x \int_0^y w_{xy}(x-\xi, y-\eta)\gamma(\xi,\eta)d\eta d\xi. \qquad (13)$$

Если $\mu \equiv 0$, то $\int_0^x \int_0^y w_{xy}(x-\xi, y-\eta)\gamma(\xi,\eta)d\eta d\xi = 0$, и из (13) получаем

$$u(x,y) = \gamma(x,y) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-\xi)\gamma(\xi,y)d\xi = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \operatorname{ch}(x-\xi)\gamma(\xi,y)d\xi. \qquad (14)$$

Формула (14) совпадает с решением уравнения (10) при $\mu \equiv 0$, приведенным в монографии [12, с. 65].

Список литературы/References

[1] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высш. шк., М., 1995 301, [Nakhushev A. M., Uravneniya matematicheskoy biologii, Vyssh. shk., M., 1995. 301 p. (in Russian)].

[2] Янгарбер В. А., "Сеточная схема для решения модифицированного уравнения влагопереноса", *1966*, №8, 46–48, [Yangarber V. A., Setochnaya skhema dlya resheniya modifitsirovannogo uravneniya vlagoperenosa, 1966, №8, 46–48. (in Russian)].

[3] Водахова В. А., "Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса", *Дифференц. уравнения*, **18**:2 (1982), 280–285, [Vodakhova V. A., Kraevaya zadacha s nelokal'nym usloviem A. M. Nakhusheva dlya odnogo psevdoparabolicheskogo uravneniya vlagoperenosa, Differents. uravneniya, 18:2 (1982), 280–285 (in Russian)].

[4] Шхануков М. Х., "О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах", *Дифференц. уравнения*, **18**:4 (1982), 689–699, [Shkhanukov M. X. O nekotorykh kraevykh zadachakh dlya uravneniya tret'ego poryadka, voznikayushchikh pri modelirovanii fil'tratsii zhidkosti v poristykh sredakh, Differents. uravneniya, 18:4 (1982), 689–699 (in Russian)].

[5] Солдатов А. П., Шхануков М. Х., "Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка", *Докл. АН СССР*, **297**:3 (1987), 547–551, [Soldatov A. P., Shkhanukov M. Kh. Kraevye zadachi s obshchim nelokal'nym usloviem A.A. Samarskogo dlya psevdoparabolicheskikh uravneniy vysokogo poryadka, Dokl. AN SSSR, 297:3 (1987), 547–551. (in Russian)].

[6] Жегалов В. И., Уткина Е. А., "Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка", *Известия Вузов. Математика*, 1999, № 10(449), 73–76, [Zhegalov V. I., Utkina E. A. Ob odnom psevdoparabolicheskom uravnenii tret'ego poryadka, Izvestiya Vuzov. Matematika, 1999, №10(449), 73–76 (in Russian)].

[7] Кожанов А. И., "Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера", *Дифференц. уравнения*, **40**:6 (2004), 769–774, [Kozhanov A. I. Ob odnoy nelokal'noy kraevoy zadache s peremennymi koeffitsientami dlya uravneniy teploprovodnosti i Allera, Differents. uravneniya, 40:6 (2004), 769–774 (in Russian)].

[8] Кожанов А. И., Попов Н. С., "О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений", *Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика*, **10**:3 (2010), 46–62, [Kozhanov A. I., Popov N. S. O razreshimosti nekotorykh zadach so smeshcheniem dlya psevdoparabolicheskikh uravneniy, Vestnik NGU. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika, 10:3 (2010), 46–62 (in Russian)].

[9] Макаова Р. Х., "Об одной краевой задаче для обобщенного уравнения Аллера", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **14**:3 (2012), 19–23, [Makaova R. Kh. Ob odnoy kraevoy zadache dlya obobshchennogo uravneniya Allera, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk, 14:3 (2012), 19–23 (in Russian)].

[10] Макаова Р. Х., "Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана-Лиувилля", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:3 (2015), 35–38, [Makaova R. Kh. Vtoraya kraevaya zadacha dlya obobshchennogo uravneniya Allera s drobnoy proizvodnoy Rimana-Liuvillya, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk, 17:3 (2015), 35–38 (in Russian)].

[11] Нахушев А. М., "Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги", *Доклады АН СССР*, **242**:5 (1978), 1008-1011, [Nakhushev A. M. Nelokal'naya zadacha i zadacha Gursa dlya nagruzhennogo uravneniya giperbolicheskogo tipa i ikh prilozheniya k prognozu pochvennoy vlagi, Doklady AN SSSR, 242:5 (1978), 1008-1011 (in Russian)].

[12] Нахушев А. М., *Нагруженные уравнения и их применения*, Наука, М., 2012, 232 с., [Nakhushev A. M. Nagruzhennye uravneniya i ikh primeneniya, Nauka, M., 2012, 232 p. (in Russian)].

[13] Нахушев А. М., "Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод", *Дифференц. уравнения*, **18**:1 (1982), 72–81, [Nakhushev A. M. Ob odnom priblizhennom metode resheniya kraevykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy i ego prilozheniya k dinamike pochvennoy vlagi i gruntovykh vod, Differents. uravneniya, 18:1 (1982), 72–81 (in Russian)].

[14] Нахушев А. М., "О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка", *Дифференц. уравнения*, **12**:1 (1976), 103–108, [Nakhushev A. M. O zadache Darbu dlya odnogo vyrozhdayushchegosya nagruzhennogo integrodifferentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka, Differents. uravneniya, 12:1 (1976), 103–108 (in Russian)].

[15] Ozturk Ilhan, "Boundary value problem for the loaded differential equation of fractional order", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **1**:2 (1995), 12–17, [Ozturk Ilhan. Boundary value problem for the loaded differential equation of fractional order, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk, 1:2 (1995), 12–17].

[16] Токова А. А., "Задача с нелокальными краевыми условиями для одного класса нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных", *2006*, № 43, 178–181, [Tokova A. A. Zadacha s nelokal'nymi kraevymi usloviyami dlya odnogo klassa nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh, 2006, №43, 178–181 (in Russian)].

[17] Токова А. А., "Краевая задача с условиями Пуанкаре для линейного нагруженного дифференциального уравнения с частными производными параболического типа", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **9**:1 (2007), 110–112, [Tokova A. A. Kraevaya zadacha s usloviyami Puankare dlya lineynogo nagruzhennogo differentsial'nogo uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk, 9:1 (2007), 110–112 (in Russian)].

[18] Хуштова Ф. Г., "Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа со знакопеременной характеристической формой", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **13**:2 (2011), 71–76, [Khushtova F. G. Nelokal'naya kraevaya zadacha dlya nagruzhennogo uravneniya parabolicheskogo tipa so znakoperemennoy kharakteristicheskoy formoy, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk, 13:2 (2011), 71–76 (in Russian)].

[19] Frost M. B., "Solvability of an initial-boundary problem for a loaded wave equation", *Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета*, 2011, № 2(35),

88-81, [Frost M. B. Solvability of an initial-boundary problem for a loaded wave equation, Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta, 2011, №2(35), 88-81].

[20] Гогуноков З. Г., "Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук", **5**:1 (2000), 20–23, [Khubiev K. U. Ob odnoy modeli nagruzhennogo giperbolo-parabolicheskogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka s kharakteristicheskim izmeneniem tipa, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk, 17:2 (2015), 48–51. (in Russian)].

[21] Хубиев К. У., "Об одной модели нагруженного гиперболо-параболического уравнения в частных производных второго порядка с характеристическим изменением типа", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:2 (2015), 48–51, [Khubiev K.U. Ob odnoy modeli nagruzhennogo giperbolo-parabolicheskogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka s kharakteristicheskim izmeneniem tipa, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk, 17:2 (2015), 48–51. (in Russian)].

[22] Хубиев К. У., "О модели нагруженного гиперболо–параболического уравнения в частных производных второго порядка", *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2015, № 2(11), 27–38, [Khubiev K.U. O modeli nagruzhennogo giperbolo–parabolicheskogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki, 2015, №2(11), 27–38 (in Russian)].

[23] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с., [Pskhu A. V. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka, Nauka, Moskva, 2005, 199 p. (in Russian)].

[24] Псху А. В., "Решение двумерного интегрального уравнения Абеля второго рода", *Известия КБНЦ РАН*, 2016, № 6(74), [Pskhu A. V. Reshenie dvumernogo integral'nogo uravneniya Abelya vtorogo roda, Izvestiya KBNTs RAN, 2016, №6(74) (in Russian)].

[25] Диткин В. А., Прудников Ф. П., *Операционное исчисление по двум переменным и его приложения*, Физматлит, М., 1959, 178 с., [Ditkin V. A., Prudnikov F. P., Operatsionnoe ischislenie po dvum peremennym i ego prilozheniya, Fizmatlit, M., 1959, 178 p. (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

[2] Янгарбер В. А. Сеточная схема для решения модифицированного уравнения влагопереноса // Доклады академии сельскохозяйственных наук. 1966. № 8. С. 46–48.

[3] Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 2. С. 280–285.

[4] Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.

[5] Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 547–551.

[6] Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Известия Вузов. Математика. 1999. № 10(449). С. 73–76.

[7] Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 769–774.

[8] Кожанов А. И., Попов Н. С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 46–62.

[9] Макаова Р. Х. Об одной краевой задаче для обобщенного уравнения Аллера // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2012. Т. 14. № 3. С. 19–23.

[10] Макаова Р. Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана-Лиувилля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. № 3. С. 35–38.
[11] Нахушев А. М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги // Доклады АН СССР. 1978. Т. 242, № 5. С. 1008-1011.
[12] Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012. 232 с.
[13] Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.
[14] Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
[15] Ozturk Ilhan Boundary value problem for the loaded differential equation of fractional order // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 1995. Т. 1, № 2. С. 12–17.
[16] Токова А. А. Задача с нелокальными краевыми условиями для одного класса нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2006. № 43. С. 178–181.
[17] Токова А. А. Краевая задача с условиями Пуанкаре для линейного нагруженного дифференциального уравнения с частными производными параболического типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2007. Т. 9, № 1. С. 110–112.
[18] Хуштова Ф. Г. Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа со знакопеременной характеристической формой // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2011. Т. 13. № 2. С. 71–76.
[19] Frost M. B. Solvability of an initial-boundary problem for a loaded wave equation //Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета. 2011, № 2(35). С. 88-81.
[20] Гогуноков З. Г. Задача Гурса для нагруженного гиперболического уравнения второго порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2000. Т. 5, № 1. С. 20–23.
[21] Хубиев К. У. Об одной модели нагруженного гиперболо-параболического уравнения в частных производных второго порядка с характеристическим изменением типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2015. Т. 17, № 2. С. 48–51.
[22] Хубиев К. У. О модели нагруженного гиперболо–параболического уравнения в частных производных второго порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). С. 27–38.
[23] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
[24] Псху А. В. Решение двумерного интегрального уравнения Абеля второго рода // Известия КБНЦ РАН. 2016. № 6(74).
[25] Диткин В. А., Прудников Ф. П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. М.: Физматлит, 1959. 178 с.

Для цитирования: Хубиев К. У. О математической модели уравнения Аллера // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). С. 56-65. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-56-65

For citation: Khubiev K. U. On mathematical models of the Aller equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2016, **16**: 4-1, 56-65. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-56-65

Поступила в редакцию / Original article submitted: 17.11.2016