Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). С. 50-55. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-50-55

УДК 517.925.4

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ *

Р. А. Пшибихова

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: pshibihova@mail.ru

В данной работе для обобщенного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами строится решение задачи Гурса.

Ключевые слова: задача Гурса, дробная производная.

MSC 35A99

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A GENERALIZED TELEGRAPH EQUATION OF FRACTIONAL ORDER WITH VARIABLE COEFFICIENTS

R. A. Pshibikhova

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia

E-mail: pshibihova@mail.ru

In this paper, we construct the solution to the Goursat problem for a generalized telegraph equation of fractional order with variable coefficients.

Key words: Goursat problem, fractional derivative.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00462)

Введение

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}D_{0y}^{\beta}u(x,y)+a(x,y)D_{0x}^{\alpha}u(x,y)+b(x,y)D_{0y}^{\beta}u(x,y)+c(x,y)u(x,y)=f(x,y), \qquad (1)$$

где $0<\alpha,\beta<1$, D_{0s}^{γ} — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувиля порядка γ с началом в точке 0 по переменной $s>0$, определенный следующим образом [1, с. 9]:

$$D_{0s}^{\gamma}f(s)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(-\gamma)}\int\limits_0^s\frac{f(v)}{(s-v)^{\gamma+1}}dv, & \gamma<0,\\ f(s), & \gamma=0,\\ \frac{d^n}{ds^n}D_{0s}^{\gamma-n}f(s), & n-1<\gamma\leq n, n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Коэффициенты $a(x,y)$ и $b(x,y)$ непрерывно дифференцируемы, а $c(x,y)$ — непрерывная функция.

В данной работе строится решение аналога задачи Гурса для уравнения (1). Ранее, в работе [2] и [3] доказана теорема существования и единственности решения аналога задачи Гурса для уравнения вида (1) при

$$a(x,y)=b(x,y)=0, c(x,y)=const.$$

А в работе [4] для уравнения (1) в случае $a(x,y)=b(x,y)=c(x,y)=0$, рассмотрены аналоги задач Коши и Гурса. В работе [5] для уравнения (1) в случае $\alpha=\beta=1$ рассмотрена задача Коши. Более полный обзор работ, посвященных исследованию уравнений в частных производных дробного порядка можно найти в [6] и [7].

Постановка задачи и формулировка результатов

Примем обозначения: $D=(0,a)\times(0,b)$, $a<\infty, b<\infty, I=\{(x,y):x\in(0,a), y=0\}, J=\{(x,y):x=0, y\in(0,b)\}$.

Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u=u(x,y)$ из класса $x^{1-\mu}y^{1-\delta}u(x,y)\in C(\overline{D})$, для некоторых $\mu>0, \delta>0$, $D_{0x}^{\alpha-1}D_{0y}^{\beta-1}u(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в области D по x,y, $D_{0x}^{\alpha-1}u(x,y)\in C(D\cup J)$, $D_{0y}^{\beta-1}u(x,y)\in C(D\cup I)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,y)\in D$.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\beta-1}u(x,y)=\psi(x), \quad 0<x<a, \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to 0}D_{0x}^{\alpha-1}u(x,y)=\varphi(y), \quad 0<y<b, \qquad (3)$$

где φ,ψ–заданные непрерывные функции.

Теорема. Пусть $x^{1-\mu}y^{1-\delta}f(x,y)\in C(\overline{D}), \lim\limits_{x\to 0}x^{1-\mu}\psi(x)<\infty, \lim\limits_{y\to 0}y^{1-\delta}\varphi(y)<\infty$, $\mu>0$, $\delta>0$, $D_{0y}^{\beta-1}\varphi(y)\in C[0,b]\cap C^1(0,b)$, $D_{0x}^{\alpha-1}\psi(x)\in C[0,a]\cap C^1(0,a)$, *и выполнено условие согласования*

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\beta-1}\varphi(y)=\lim_{x\to 0}D_{0x}^{\alpha-1}\psi(x).$$

Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям (2), (3). Решение имеет вид

$$u(x,y)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y f(s,t)v(x,y,s,t)dtds+\int\limits_0^x \psi(s)\left(\partial_{xs}^{\alpha}v(x,y,s,0)+v(x,y,s,0)b(s,0)\right)ds$$

$$+\int\limits_0^y \varphi(t)\left(\partial_{yt}^{\beta}v(x,y,0,t)+v(x,y,0,t)a(0,t)\right)dt-\varphi_0 v(x,y,0,0). \qquad (4)$$

Здесь $\varphi_0=\lim\limits_{y\to 0}D_{0y}^{\beta-1}\varphi(y)$, $v(x,y,s,t)=w_{xy}(x,y,s,t)$, $w(x,y,s,t)$ – есть решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$w(x,y,s,t)+D_{yt}^{-\beta}\left[a(s,t)w(x,y,s,t)\right]+D_{xs}^{-\alpha}\left[b(s,t)w(x,y,s,t)\right]+$$

$$+D_{xs}^{-\alpha}D_{yt}^{-\beta}\left[c(s,t)w(x,y,s,t)\right]=\frac{(x-s)^{\alpha}(y-t)^{\beta}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)},$$

∂_{0s}^{γ} – производная Капуто порядка γ по переменной s, определяемая с помощью равенства [1, с. 11]:

$$\partial_{0s}^{\gamma}g(s)=D_{0s}^{\gamma-n}g^{(n)}(s),\quad n-1<\gamma\le n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Представление решения

Пусть $u(x,y)$ – регулярное решение уравнения (1), а функция $w(x,y,s,t)$ для любых фиксированных $(x,y)\in D$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{xs}^{\alpha}\partial_{yt}^{\beta}w(x,y,s,t)+\partial_{xs}^{\alpha}[a(s,t)w(x,y,s,t)]+\partial_{yt}^{\beta}[b(s,t)w(x,y,s,t)]+c(s,t)w(x,y,s,t)=1, \quad (5)$$

как функция переменных s и t в области $\{(s,t):s\in(0;x),t\in(0;y)\}$. Пусть также выполнены условия

$$w(x,y,s,y)=\ 0,s\in[0;x],w(x,y,x,t)=0,t\in[0;y]. \qquad (6)$$

Поэтому, с учетом формулы дробного интегрирования по частям [6, с. 15] и в силу равенств (2), (3), (6) имеем

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^y w(x,y,s,t)D_{0s}^{\alpha}D_{0t}^{\beta}u(s,t)dtds=\int\limits_0^y w(x,y,s,t)D_{0s}^{\alpha-1}D_{0t}^{\beta}u(x,t)|_0^x dt-$$

$$-\int\limits_0^x\int\limits_0^y w_s(x,y,s,t)D_{0s}^{\alpha-1}D_{0t}^{\beta}u(s,t)dtds=\int\limits_0^y w(x,y,x,t)D_{0x}^{\alpha-1}D_{0t}^{\beta}u(x,t)dt-$$

$$-\int\limits_0^y w(x,y,0,t)D_{0t}^{\beta}[D_{0x}^{\alpha-1}u(x,t)]_{x=0}dt+\int\limits_0^x\int\limits_0^y \partial_{xs}^{\alpha}w(x,y,s,t)D_{0t}^{\beta}u(s,t)dtds=$$

$$=-\int\limits_0^y w(x,y,0,t)D_{0t}^{\beta}\varphi(t)dt+\int\limits_0^x \partial_{xs}^{\alpha}w(x,y,s,t)D_{0t}^{\beta-1}u(s,t)|_0^y ds-$$

$$-\int\limits_0^x\int\limits_0^y \partial_{xs}^{\alpha}w_t(x,y,s,t)D_{0t}^{\beta-1}u(s,t)dtds=-w(x,y,0,t)D_{0t}^{\beta-1}\varphi(t)|_0^y+$$

$$+\int\limits_0^y w_t(x,y,0,t)D_{0t}^{\beta-1}\varphi(t)dt+\int\limits_0^x \partial_{xs}^{\alpha}w(x,y,s,y)D_{0y}^{\beta-1}u(s,y)ds-$$

$$-\int\limits_0^x \partial_{xs}^{\alpha}w(x,y,s,0)[D_{0y}^{\beta-1}u(s,y)]_{y=0}ds+\int\limits_0^x\int\limits_0^y u(s,t)\partial_{xs}^{\alpha}\partial_{yt}^{\beta}w(x,y,s,t)dtds=$$

$$=-w(x,y,0,y)D_{0y}^{\beta-1}\varphi(y)+w(x,y,0,0)\varphi_0-$$

$$-\int\limits_0^y \partial_{yt}^{\beta}w(x,y,0,t)\varphi(t)dt-\int\limits_0^x \partial_{xs}^{\alpha}w(x,y,s,0)\psi(s)ds+$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^y u(s,t)\partial_{xs}^{\alpha}\partial_{yt}^{\beta}w(x,y,s,t)dtds=\int\limits_0^x\int\limits_0^y u(s,t)\partial_{xs}^{\alpha}\partial_{yt}^{\beta}w(x,y,s,t)dtds-$$

$$-\int\limits_0^x \psi(s)\partial_{xs}^{\alpha}w(x,y,s,0)ds-\int\limits_0^y \varphi(t)\partial_{yt}^{\beta}w(x,y,0,t)dt+w(x,y,0,0)\varphi_0.$$

Аналогично получаем:

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^y w(x,y,s,t)a(s,t)D_{0s}^{\alpha}u(s,t)dtds=$$

$$=\int\limits_0^y\left[w(x,y,s,t)a(s,t)\right]D_{0s}^{\alpha-1}u(s,t)|_0^x dt-\int\limits_0^x\int\limits_0^y\frac{\partial}{\partial s}\left[w(x,y,s,t)a(s,t)\right]D_{0s}^{\alpha-1}u(s,t)dtds=$$

$$=\int\limits_0^x\int\limits_0^y u(s,t)\partial_{xs}^{\alpha}[a(s,t)w(x,y,s,t)]dtds+$$

$$+\int\limits_0^y w(x,y,x,t)a(x,t)D_{0x}^{\alpha-1}u(x,t)dt-\int\limits_0^y w(x,y,0,t)a(0,t)\varphi(t)dt=$$

$$=\int\limits_0^x\int\limits_0^y u(s,t)\partial_{xs}^{\alpha}[a(s,t)w(x,y,s,t)]dtds-\int\limits_0^y w(x,y,0,t)a(0,t)\varphi(t)dt,$$

$$\int_0^x\int_0^y w(x,y,s,t)b(s,t)D_{0t}^{\beta}u(s,t)dtds=\int_0^x\int_0^y u(s,t)\partial_{yt}^{\beta}[b(s,t)w(x,y,s,t)]dtds+$$

$$+\int_0^x w(x,y,s,y)b(s,y)D_{0y}^{\beta-1}u(s,y)ds-\int_0^x b(s,0)w(x,y,s,0)\psi(s)ds=$$

$$\int_0^x\int_0^y u(s,t)\partial_{yt}^{\beta}[b(s,t)w(x,y,s,t)]dtds-\int_0^x b(s,0)w(x,y,s,0)\psi(s)ds.$$

Складывая последние равенства, учитывая (1), (5) имеем

$$\int_0^x\int_0^y u(s,t)dtds=\int_0^x\int_0^y f(s,t)w(x,y,s,t)dtds+\int_0^x \psi(s)\partial_{xs}^{\alpha}w(x,y,s,0)ds+$$

$$+\int_0^y \varphi(t)\partial_{yt}^{\beta}w(x,y,0,t)dt+\int_0^x w(x,y,s,0)b(s,0)\psi(s)ds+$$

$$+\int_0^y w(x,y,0,t)a(0,t)\varphi(t)dt-\varphi_0 w(x,y,0,0).$$

Дифференцируя по x и по y последнее равенство, получаем, что решение уравнения (1) имеет вид (4).

Из соотношения (4), в частности, следует единственность решения $u(x,y)$. Что и требовалось доказать.

Функция Римана

Применяя к обеим частям уравнения (5) операторы $D_{xs}^{1-\alpha}, D_{yt}^{1-\beta}$, получим

$$w_{st}+D_{yt}^{1-\beta}(aw)+D_{xs}^{1-\alpha}(bw)+D_{xs}^{1-\alpha}D_{yt}^{1-\beta}(cw)=\frac{(x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}. \tag{7}$$

Применяя далее операторы D_{xs}^{-1}, D_{yt}^{-1}, к уравнению (7), получаем, что задача (5), (6) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$w(x,y)+D_{yt}^{-\beta}(aw)+D_{xs}^{-\alpha}(bw)+D_{xs}^{-\alpha}D_{yyt}^{-\beta}(cw)=\frac{(x-s)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)},$$

решение которого существует и единственно.

Список литературы/References

[1] Нахушев А.М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с., [Nahushev A.M., Drobnoe ischislenie i ego primenenie, Fizmatlit, Moskva, 2003, 272 p. (in Russian)].

[2] Пшибихова Р.А., "Задача Гурса для обобщенного телеграфного уравнения дробного порядка", *Дифференциальные уравнения*, **50**:6 (2014), 839–843, [Pshibihova R. A. Zadacha Gursa dlja obobshhennogo telegrafnogo uravnenija drobnogo porjadka, Differencial'nye uravnenija, 50:6 (2014), 839–843 (in Russian)].

[3] Пшибихова Р.А., "Задача Гурса для дробного телеграфного уравнения с производными Капуто", *Математические заметки*, **99**:4 (2016), 562–566, [Pshibihova R. A., Zadacha Gursa dlja drobnogo telegrafnogo uravnenija s proizvodnymi Kaputo, Matematicheskie zametki, 99:4 (2016), 562–566 (in Russian)].

[4] Еремин А.С., "Три задачи для одного уравнения в частных дробных производных", *Математическое моделирование и краевые задачи*, **3** (2004), 94—98, [Eremin A. S. Tri zadachi dlja odnogo uravnenija v chastnyh drobnyh proizvodnyh, Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi, 3 (2004), 94—98 (in Russian)].

[5] Смирнов В.И., *Курс высшей математики*, Наука, М., 1981, 550 с., [Smirnov V. I. Kurs vysshej matematiki, Nauka, Moskva, 1981. 550 p.].

[6] Псху А.В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с., [Pshu A. V., Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka, Nauka, Moskva, 2005, 199 p. (in Russian)].

[7] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam, 2006, 204 c.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[2] Пшибихова Р. А. Задача Гурса для обобщенного телеграфного уравнения дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. №6. С. 839–843

[3] Пшибихова Р. А. Задача Гурса для дробного телеграфного уравнения с производными Капуто // Математические заметки. 2016. Т. 99. №4. С. 562–566

[4] Еремин А. С. Три задачи для одного уравнения в частных дробных производных // Математическое моделирование и краевые задачи. 2004. № 3. С. 94—98

[5] Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1981. 550 с.

[6] Псху А. В., Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

[7] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Math. Stud. Elsevier. Amsterdam. 2006, 204 p.

Для цитирования: Пшибихова Р. А. Краевая задача для обобщенного телеграфного уравнения с переменными коэффициентами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). C. 50-55. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-50-55

For citation: Pshibikhova R. A. Boundary value problem for a generalized telegraph equation of fractional order with variable coefficients, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **16**: 4-1, 50-55. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-50-55

Поступила в редакцию / Original article submitted: 23.11.2016