Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). С. 45-49. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-45-49

УДК 517.95

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

Р. Х. Макаова

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89-а
E-mail: Makaova.Ruzanna@mail.ru

Для неоднородного уравнения Аллера исследуется первая краевая задача. С помощью метода Фурье найдено явное представление регулярного решения.

Ключевые слова: уравнение Аллера, первая краевая задача

© Макаова Р. Х., 2016

MSC 35R11

THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE NON-HOMOGENEOUS HALLAIRE EQUATION

R. Kh. Makaova

Institute of Applied Mathematics and Automation,89-a Shortanova St, Nalchik, 360000, Russia
E-mail: Makaova.Ruzanna@mail.ru

First boundary value problem is investigated for the Hallaire inhomogeneous equation. With the help of the Fourier method we have found an explicit representation of a regular solution.

Key words: Hallaire equation, first boundary value problem.

© Makaova R. Kh., 2016

Введение

В прямоугольной области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ рассматривается уравнение Аллера

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + f(x,y), \tag{1}$$

где a, b – заданные положительные числа; $f(x,y)$ – известная функция; $u(x,y)$ – значение искомой функции в точке x в момент времени y.

Известно [1], что при определенных допущениях уравнение (1) описывает фильтрацию жидкости в пористых средах и его решение $u = u(x,y)$ интерпретируется как влажность почвы с коэффициентом диффузивности a и коэффициентом влагопроводности b в точке x почвенного слоя $0 \le x \le r$ в момент времени y, $0 \le y \le T$.

Уравнение (1) является уравнением третьего порядка гиперболического типа, хотя по определению Showalter R.E., Ting T.W. [2] его относят к уравнениям псевдопараболического типа. Локальные, нелокальные и смешанные краевые задачи для уравнений псевдопараболического типа исследовались в работах [3]-[8].

Постановка задачи и полученные результаты

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x,y)$ такую, что $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, u_{xx}, $u_{xxy} \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1).

Исследуется следующая

Задача. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее начальному условию*

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le r, \tag{2}$$

и граничным условиям

$$u(0,y) = 0, \quad u(r,y) = 0, \quad 0 \le y \le T. \tag{3}$$

Применяя метод разделения переменных, нетривиальное решение задачи (2)-(3) для однородного уравнения Аллера ищем в виде

$$u(x,y) = X(x)Y(y), \tag{4}$$

где $X(x)$ - функция только переменного x, $Y(y)$ - функция только переменного y.

Подставляя предполагаемую форму (4) в однородное уравнение Аллера, получаем

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{aX''}{X - bX''} = -\lambda, \quad \lambda > 0 = const. \tag{5}$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ из (5), с учетом (3) и (4), приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$X'' + \mu X = 0, \quad \mu = \frac{\lambda}{a - b\lambda}, \tag{6}$$

$$X(0) = X(r) = 0, \quad 0 \le x \le r. \tag{7}$$

При $\mu \leq 0$ задача (6)-(7) имеет только тривиальное решение $u(x,y) \equiv 0$.

Пусть $\mu > 0$. Тогда нетривиальные решения задачи (6)-(7) возможны лишь при значениях

$$\mu_n = \left(\frac{\pi n}{r}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = C_n sin(\sqrt{\mu_n} x), \quad C_n = const.$$

Легко заметить, что система $\left\{sin(\sqrt{\mu_n} x)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{sin(\frac{\pi n}{r} x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ собственных функций задачи (6)-(7) образует полную ортогональную систему в пространстве $L_2[0,r]$.

Найдем решение неоднородного уравнения Аллера (1) в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи (6)-(7), т.е. в виде

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) sin(\sqrt{\mu_n} x), \tag{8}$$

где $u_n(y)$ - пока неизвестные достаточно гладкие функции.

Предположим, что правая часть $f(x,y)$ уравнения (1) допускает разложение в ряд Фурье по собственным функциям задачи (6)-(7):

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) sin(\sqrt{\mu_n} x), \tag{9}$$

где

$$f_n(y) = \frac{2}{r} \int_0^r f(\xi, y) sin(\sqrt{\mu_n} \xi) d\xi.$$

Отметим, что если функция $f(x,y)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$, имеет кусочно непрерывную производную в Ω и $f(0,y) = f(r,y) = 0$, то ее всегда можно разложить в равномерно сходящийся ряд Фурье по полной ортогональной системе собственных функций [9].

Из (1), с учетом (8) и (9), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 + b\mu_n) u_n'(y) + a\mu_n u_n(y) - f_n(y)\right] sin(\sqrt{\mu_n} x) = 0.$$

Из последнего равенства, при начальном условии (2), приходим к следующей задаче относительно искомой функции $u_n(y)$:

$$(1 + b\mu_n) u_n'(y) + a\mu_n u_n(y) = f_n(y), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$u_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

решение которого выписывается по формуле

$$u_n(y) = \frac{1}{1 + b\mu_n} \int_0^y e^{-\frac{a\mu_n}{1+b\mu_n}(y-\eta)} f_n(\eta) d\eta, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Подставляя выражение (10), из (8) находим решение задачи (2), (3) для уравнения (1) в виде

$$u(x,y) = \int_0^y \int_0^r G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta, \tag{11}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{r(1+b\mu_n)}e^{-\frac{a\mu_n}{1+b\mu_n}(y-\eta)}sin(\sqrt{\mu_n}x)sin(\sqrt{\mu_n}\xi). \qquad (12)$$

Решение (11) сходится равномерно, так как (12) при всех $y-\eta\geq 0$ является рядом, который мажорируется абсолютно сходящимся числовым рядом $2r\sum\limits_{n=1}^{\infty}[r^2+b\pi^2n^2]^{-1}$. Равномерная сходимость $u_y(x,y)$ доказывается аналогично.

Пусть существует ограниченная производная $f_{xx}(x,y)$. Из представления (12) верно, что $G(x,y;\xi,\eta)=G(\xi,y;x,\eta)$ и $G(0,y;\xi,\eta)=G(r,y;\xi,\eta)=0$. Тогда цепочка равенств, полученных последовательным интегрированием по частям доказывает существование производных u_{xx}, u_{xxy}:

$$u_{xx}(x,y)=\int\limits_0^y\int\limits_0^r G_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int\limits_0^y\left[G_{\xi}(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)\right]|_0^r\,d\eta-$$

$$-\int\limits_0^y\left[G(x,y;\xi,\eta)f_{\xi}(\xi,\eta)\right]|_0^r\,d\eta+\int\limits_0^y\int\limits_0^r G(x,y;\xi,\eta)f_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta=$$

$$=\int\limits_0^y\int\limits_0^r G(x,y;\xi,\eta)f_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$u_{xxy}(x,y)=\int\limits_0^r G(x,y;\xi,y)f_{\xi\xi}(\xi,y)d\xi+\int\limits_0^y\int\limits_0^r G_y(x,y;\xi,\eta)f_{\xi\xi}(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Таким образом, если выполнены дополнительные условия гладкости относительно функции $f(x,y)$, то формула (11) дает регулярное решение задачи (2) - (3) для уравнения (1). Единственность решения исследуемой задачи вытекает из доказанной в работе [10] теоремы.

Заключение

Для неоднородного уравнения Аллера (1) справедлива следующая

Теорема. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$, имеет кусочно непрерывную производную в Ω и $f(0,y)=f(r,y)=0$, а также существует ограниченная производная $f_{xx}(x,y)$. Тогда единственное регулярное решение задачи* (2) - (3) *для уравнения* (1) *выписывается по формуле* (11).

Список литературы/References

[1] Нахушев А. М., *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*, Наука, М., 2006, 287 с., [Nahushev A. M., Zadachi so smeshheniem dlja uravnenij v chastnyh proizvodnyh, Nauka, Moscva, 2006, 287 p. (in Russian)].

[2] Showalter R. E., Ting T. W., "Pseudoparabolic partial differential equations", *SIAM J. Math. Anal.*, **1**:1 (1970), 1–26.

[3] Barenblatt G. I., Zheltov Iu. P., Kochina I. N., "Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]", *PMM*, **24**:5 (1960), 852–864.

[4] Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J., "Instability, Uniqueness, and Nonexistence Theorems for the Equation on a Strip", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **19** (1965), 100–116.

[5] Yangarber V.A., “The mixed problem for a modified moisture-transfer equation”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.*, **8**:1 (1967), 62–64.

[6] Шхануков М. Х., “О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах”, *Дифференц. уравнения*, **18**:4 (1982), 689–699, [Shhanukov M. H. O nekotoryh kraevyh zadachah dlja uravnenij tret'ego porjadka, voznikajushhih pri modelirovanii fil'tracii zhidkosti v poristyh sredah. Differenc. uravnenija, 18:4 (1982), 689–699 (in Russian)].

[7] Водахова В. А., “Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса”, *Дифференц. уравнения*, **18**:18 (1982), 280–285, [Vodahova V. A. Kraevaja zadacha s nelokal'nym usloviem A.M. Nahusheva dlja odnogo psevdoparabolicheskogo uravnenija vlagoperenosa, Differenc. uravnenija, 18:18 (1982), 280–285 (in Russian)].

[8] Макаова Р. Х., “Задача Трикоми для одного уравнения смешанного типа”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук*, **17**:1 (2015), 22–24, [Makaova R. H. Zadacha Trikomi dlja odnogo uravnenija smeshannogo tipa, Doklady Adygskoj (Cherkesskoj) Mezhdunarodnoj Akademii nauk, 17:1 (2015), 22–24 (in Russian)].

[9] Бугров Я.С., Никольский С.М., *Высшая математика*, Дрофа, М., 2004, 512 с., [Bugrov Ja. S., Nikol'skij S.M., Vysshaja matematika, Drofa, Moskva, 2004, 512 p. (in Russian)].

[10] Colton D., “Pseudoparabolic Equations in One Space Variable”, *Journal of Differ. Equations*, **12**:3 (1972), 559–565.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М.Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

[2] Showalter R. E., Ting T. W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. vol. 1. no 1. pp.1–26

[3] Barenblatt G. I., Zheltov Iu. P., Kochina I. N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata] // PMM. 1960. vol. 24. no 5. pp. 852–864

[4] Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J. Instability, Uniqueness, and Nonexistence Theorems for the Equation on a Strip // Arch. Rat. Mech. Anal. 1965. vol. 19. pp. 100–116

[5] Yangarber V. A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1967. vol. 8. no 1. pp.62–64

[6] Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. №4. С. 689–699

[7] Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. №18. С.280–285

[8] Макаова Р. Х. Задача Трикоми для одного уравнения смешанного типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук. 2015. Т. 17. №1. С. 22–24

[9] Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. М.: Дрофа, 2004. 512 с.

[10] Colton D. Pseudoparabolic Equations in One Space Variable // Journal of Differ. Equations. 1972. vol. 12. no 3. pp. 559–565

Для цитирования: Макаова Р. Х. Первая краевая задача для неоднородного уравнения Аллера // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). C. 45-49. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-45-49

For citation: Makaova R. Kh. The first boundary value problem for the non-homogeneous Hallaire equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **16**: 4-1, 45-49. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-45-49

Поступила в редакцию / Original article submitted: 29.11.2016