Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). C. 38-44. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-38-44

УДК 517.95

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ С ОПЕРАТОРОМ КАПУТО

Ф. М. Лосанова

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 а

E-mail: losanovaf@gmail.com

В данной работе рассматривается нелокальная краевая задача с интегральным условием для уравнения дробной диффузии с оператором Капуто. Доказаны теоремы существования и единственности решения поставленной задачи.

Ключевые слова: задача с интегральным условием, уравнение дробной диффузии, частная дробная производная Капуто.

MSC 34L99

PROBLEM WITH AN INTEGRAL CONDITION FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION WITH OPERATOR CAPUTO

F. M. Losanova

Institute of Applied Mathematics and Automation 360000, Kabardino-Balkariya, Nalchik, Shortanova st., 89, Russia

E-mail: losanovaf@gmail.com

In this paper we consider a nonlocal boundary value problem with integral condition for the fractional diffusion equation with Caputo operator. The theorem of existence of a solution of the problem.

Key words: There it has proved the existence and uniqueness of solutions of the problem.

Введение

В области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < \infty, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x,y) - \partial_{0y}^{\alpha} u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где

$$\partial_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^y \frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{(y-\eta)^{\alpha}}$$

– частная дробная производная Капуто порядка α [1, с. 9] (см. [2]), $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, $0 < \alpha \leq 1$.

Оператор ∂_{0y}^{α} впервые был введен в 1967 году итальянским механиком М. Капуто в работе [2] и представлен в его монографии [3]. В работе [4] для многомерного уравнения диффузии дробного порядка с производной Капуто исследована задача Коши. В работе [5] для уравнения (1) рассматривались первая краевая задача в прямоугольной области, задача Коши и краевая задача в бесконечной области, а в [6, с. 104] методом редукции к системе уравнений меньшего порядка построено решение задачи Коши и первой краевой задачи для уравнения (1). Также в работе [6, с. 115] построено общее представление решения уравнения (1) в прямоугольной области, решены основные краевые задачи и найдены соответствующие функции Грина. Для обобщенного уравнения (1) с младшими членами доказан принцип экстремума в работе [7]. Краевые задачи с интегральными условиями для параболических уравнений, в том числе с дробной производной, исследовались в работах [8] - [11].

Постановка задачи

Решение $u(x,y)$ уравнения (1) назовем *регулярным* в области Ω, если $u(x,y) \in C(\{x \geq 0,\ y \in (0,\ T)\})$, $u(x,y)$ абсолютно непрерывна как функция переменной y, при каждом фиксированном x, на отрезке $[0,T]$, $u(x,y)$ имеет непрерывные производные до 2-го порядка по x.

В работе исследуется следующая задача.

В области Ω требуется найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

$$\int\limits_0^l K(x,y)u(x,y)dx = \psi(y), \qquad 0 < y < T, \tag{3}$$

где $\tau(x)$, $\psi(y)$, $K(x,y)$ – заданные функции.

Без ограничения общности можно считать, что $f(x,y) \equiv 0$, $\tau(x) \equiv 0$.

Действительно рассмотрим задачу, решение которой найдено в [5, с. 134]

$$\upsilon_{xx}(x,y) - \partial_{0y}^{\alpha} \upsilon(x,\eta) = f(x,y), \tag{4}$$

$$\upsilon(x,0) = \tau(x), \qquad 0 < x < \infty, \tag{5}$$

$$v(0,y)=0, \qquad 0<y<T. \tag{6}$$

Искомое решение будем искать в виде $u(x,y)=\tilde{u}(x,y)+\upsilon(x,y)$, где $\tilde{u}(x,y)$ есть решение задачи

$$\tilde{u}_{xx}(x,y)-\partial_{0y}^{\alpha}\tilde{u}(x,\eta)=0, \tag{7}$$

$$\tilde{u}(x,0)=0, \qquad 0<x<\infty, \tag{8}$$

$$\int\limits_0^l K(x,y)\tilde{u}(x,y)dx=\tilde{\psi}(y), \qquad 0<y<T, \tag{9}$$

$$\tilde{\psi}(y)=\psi(y)-\int\limits_0^l K(x,y)v(x,y)dx.$$

Таким образом задача (1)-(3) эквивалента задаче (7)-(9). Поэтому далее будем рассматривать следующую задачу.

В области Ω требуется найти регулярное решение $u(x,y)$ однородного уравнения

$$u_{xx}(x,y)-\partial_{0y}^{\alpha}u(x,\eta)=0, \tag{10}$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x,0)=0, \qquad 0<x<\infty, \tag{11}$$

$$\int\limits_0^l K(x,y)u(x,y)dx=\psi(y), \qquad 0<y<T, \tag{12}$$

где $\psi(y)$, $K(x,y)$ – заданные функции.

Теорема о существовании и единственности решения задачи

1. Пусть $K(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, $K_x(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, $K(0,y)\not\equiv 0$,

$$D_{0y}^{\alpha-1}\frac{\psi(y)}{K(0,y)}\in AC[0,T],\ \lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}\frac{\psi(y)}{K(0,y)}=0.$$

Тогда существует регулярное решение уравнения (10) в области Ω, удовлетворяющее краевым условиям (11), (12) и представимое в виде

$$u(x,y)=\int\limits_0^y \frac{1}{y-\eta}e_{1,\alpha}^{1,0}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^{\alpha}}\right)\varphi(\eta)d\eta. \tag{13}$$

где $\varphi(y)=D_{0y}^{\alpha}g(y)$, а $g(y)$ – является решением интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода

$$g(y)+\int\limits_0^y G(y,t)g(t)dt=\frac{\psi(y)}{K(0,y)},$$

где $G(y,t)=\frac{1}{K(0,y)}[\int\limits_0^l (y-\eta)^{\alpha-1}e^{1,\alpha}_{1,\alpha}(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha})K_x(x,y)dx-K(l,y)(y-\eta)^{\alpha-1}e^{1,\alpha}_{1,\alpha}(-\frac{l}{(y-\eta)^\alpha})]$.
Здесь $e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z)$ – функция типа Райта [6, с. 22].

2. Решение задачи (10)-(12) в области Ω единственно в классе функций, удовлетворяющих для некоторого $k>0$ условию

$$u(x,\,y)=O(exp(kx^{\frac{2}{2-\alpha}}))$$

при $x\to+\infty$.

Доказательство

Используя представление решения задачи (13) с условиями (12) и $u(0,y)=\varphi(y)$ для однородного уравнения (10) [5, с. 38] и удовлетворив условию (12), получим

$$\int\limits_0^l K(x,\,y)u(x,\,y)dx=\int\limits_0^l K(x,\,y)\int\limits_0^y \frac{1}{y-\eta}e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right)\varphi(\eta)d\eta dx=\psi(y). \tag{14}$$

Перепишем (14) в виде

$$\int\limits_0^y K_1(y,\,\eta)\varphi(\eta)d\eta dx=\psi(y), \tag{15}$$

где

$$K_1(y,\,\eta)=\int\limits_0^l \frac{1}{y-\eta}e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right)K(x,\,y)dx. \tag{16}$$

Уравнение (15) является интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода с ядром $K_1(y,\,\eta)$ и правой частью $\psi(y)$.

Проинтегрировав по частям интеграл в правой части (16), получим

$$K_1(y,\,\eta)=K(0,\,y)\frac{(y-\eta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-K(l,\,y)(y-\eta)^{\alpha-1}e^{1,\alpha}_{1,\alpha}\left(-\frac{l}{(y-\eta)^\alpha}\right)+$$

$$+\int\limits_0^l (y-\eta)^{\alpha-1}e^{1,\alpha}_{1,\alpha}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right)K_x(x,\,\eta)dx.$$

Подставим в (15)

$$K(0,\,y)\int\limits_0^y \frac{(y-\eta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\varphi(\eta)d\eta+\int\limits_0^y K_2(y,\,\eta)\varphi(\eta)d\eta=\psi(y), \tag{17}$$

где

$$K_2(y,\,\eta)=\int\limits_0^l (y-\eta)^{\alpha-1}e^{1,\alpha}_{1,\alpha}\left(-\frac{x}{(y-\eta)^\alpha}\right)K_x(x,\,\eta)dx-K(l,\,y)(y-\eta)^{\alpha-1}e^{1,\alpha}_{1,\alpha}\left(-\frac{l}{(y-\eta)^\alpha}\right).$$

$$K(0,y)\,D_{oy}^{-\alpha}\,\varphi(y)+\int\limits_0^y K_2(y,\eta)\varphi(\eta)d\eta=\psi(y). \tag{18}$$

В силу формулы дробного интегрирования функции Райта [6, с. 26] и в силу свойств, наложенных на ядро $K(x,\,y)$, второе слагаемое в левой части уравнения (18) можно записать в виде

$$\int\limits_0^y K_2(y,\eta)\varphi(\eta)d\eta=\int\limits_0^y D_{y\eta}^{-\alpha}\,K_3(y,\eta)\varphi(\eta)d\eta=\int\limits_0^y K_3(y,t)\,D_{0t}^{-\alpha}\,\varphi(t)dt. \tag{19}$$

Далее обозначив $g(y)=D_{0y}^{-\alpha}\,\varphi(y)$ с учетом (19), равенство (18) перепишем в виде

$$K(0,y)g(y)+\int\limits_0^y K_3(y,t)g(t)dt=\psi(y). \tag{20}$$

Так как по условию $K(0,\,y)\not\equiv 0$, то соотношение (20) принимает вид

$$g(y)+\int\limits_0^y K_4(y,t)g(t)dt=\psi_1(y), \tag{21}$$

где $K_4(y,t)=\dfrac{K_3(y,t)}{K(0,y)}$, $\psi_1(y)=\dfrac{\psi(y)}{K(0,y)}$.

Уравнение (21) является интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода. Из теории интегрального уравнения Вольтерра второго рода известно [10, с. 227], что условия, наложенные на $K(x,y)$ и $\varphi(y)$ обеспечивают существование единственного решения $g(y)\in L[0,T]$ уравнения (21), которое выписывается в виде

$$g(y)=\psi_1(y)-\int\limits_0^y R(y,t)\psi_1(t)dt,$$

где $R(y,t)$ – резольвента ядра $K_4(y,t)$. Учитывая условия теоремы, накладываемые на $\psi(y)$ и на $K(x,y)$, получим что $\varphi(y)=D_{0y}^{\alpha}\,g(y)$.

Теорема доказана.

Список литературы/References

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с., [Nakhushev A. M., Drobnoe ischislenie i ego primenenie, Fizmatlit, M., 2003, 272 p. (in Russian)].

[2] Caputo M., "Lineal model of dissipation whose Q is almost frequancy independent", *II. Geophys. J. Astronom. Soc.*, **13** (1967.), 529-539.

[3] Caputo M., *Elasticita e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna, 1969.

[4] Кочубей А. Н., "Диффузия дробного порядка", *Дифференциальные уравнения*, **26**:4 (1990), 660-670, [Kochubey A. N. Diffuziya drobnogo poryadka, Differentsial'nye uravneniya, 26:4 (1990), 660-670. (in Russian)].

[5] Геккиева С. Х., *Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени. Дисс. канд. физ.-мат. наук*, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, 2003, [Gekkieva S. Kh. Kraevye zadachi dlya nagruzhennykh parabolicheskikh uravneniy s drobnoy proizvodnoy po vremeni. Diss. kand. fiz.-mat. nauk, Nauchno-issledovatel'skiy institut prikladnoy matematiki i avtomatizatsii KBNTs RAN, Nal'chik, 2003.(in Russian)].

[6] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с., [Pskhu A. V. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka, Nauka, M., 2005, 199 p. (in Russian)].

[7] Нахушева В. А., *Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов*, Наука, М., 2006, 173 с., [Nakhusheva V. A. Differentsial'nye uravneniya matematicheskikh modeley nelokal'nykh protsessov, Nauka, M., 2006, 173 p. (in Russian)].

[8] Нахушева З. А., "1-я и 2-я краевые задачи в интегральной постановке для параболического уравнения второго порядка", *Дифференциальные уравнения*, **26**:1 (1990), 1982-1992, [Losanova F. M., Nelokal'naya kraevaya zadacha s operatorom Kaputo, Izv. VUZov Severo-Kavkazskiy region, 2010, №5(159), 22-25. (in Russian)].

[9] Лосанова Ф. М., "Нелокальная краевая задача с оператором Капуто", *Изв. ВУЗов Северо-Кавказский регион*, 2010, № 5(159), 22-25, [Losanova F. M. Nelokal'naya kraevaya zadacha s operatorom Kaputo. Izv. VUZov Severo-Kavkazskiy region, 2010, №5(159), 22-25 (in Russian)].

[10] Лосанова Ф. М., "Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения с оператором Капуто", Материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых "Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики", 80-81, [Losanova F. M., Nelokal'naya kraevaya zadacha dlya nagruzhennogo uravneniya s operatorom Kaputo, Materialy Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii molodykh uchenykh "Sovremennye voprosy matematicheskoy fiziki, matematicheskoy biologii i informatiki, 80-81 (in Russian)].

[11] Лосанова Ф. М., "Задача с условием Самарского для уравнения дробной диффузии в полуполосе", *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2015, № 2(11), 17-21, [Losanova F. M. Zadacha s usloviem Samarskogo dlya uravneniya drobnoy diffuzii v polupolose, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki, 2015, №2(11), 17-21 (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

[1] *Нахушев А. М.*Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[2] Caputo M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequancy independent // II. Geophys. J. Astronom. Soc. 1967. Vol. 13. P. 529-539.

[3] Caputo M. Elasticita e Dissipazione. Bologna: Zanichelli. 1969.

[4] Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. №4. С. 660-670

[5] *Геккиева С. Х.* Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени. Кандидатская диссертация. Нальчик, Научно-исследовательский институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. 2003

[6] *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М: Наука, 2005. 199 с.

[7] *Нахушева В. А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с.

[8] *Нахушева З. А.* 1-я и 2-я краевые задачи в интегральной постановке для параболического уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, №1. С. 1982-1992.

[9] *Лосанова Ф. М.* Нелокальная краевая задача с оператором Капуто // Изв. ВУЗов Северо-Кавказский регион. 2010. №5(159). С. 22-25.

[10] *Лосанова Ф. М.* Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения с оператором Капуто // Материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых "Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики". С. 80-81.

[11] Лосанова Ф. М. Задача с условием Самарского для уравнения дробной диффузии в полуполосе // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2 (11). С. 17-21.

Для цитирования: Лосанова Ф. М. Задача с интегральным условием для уравнения дробной диффузии с оператором Капуто // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). С. 38-44. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-38-44

For citation: Losanova F. M. Problem with an integral condition for fractional diffusion equation with operator Caputo, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **16**: 4-1, 38-44. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-38-44

Поступила в редакцию / Original article submitted: 03.12.2016