Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). C. 32-37. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-32-37

УДК 517.95

ОЦЕНКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ *

Л. Л. Карашева

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А
E-mail: k.liana86@mail.ru

В данной работе для параболического уравнения высокого порядка с дробной производной по временной переменной получена оценка фундаментального решения.

Ключевые слова: дробная производная Римана-Лиувилля, параболическое уравнение

MSC 35K25

AN ESTIMATE FOR THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF HIGH ORDER PARABOLIC EQUATION WITH RIEMANN-LIOUVILLE DERIVATIVE WITH RESPECT TO THE TIME VARIABLE

L. L. Karasheva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia
E-mail: k.liana86@mail.ru

In this paper we derived an estimate for the fundamental solution of high order parabolic equation with time fractional derivative.

Key words: Riemann-Liouville fractional derivative, parabolic equation.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00462)

Введение

Рассмотрим в области $D = \{(x,t) : -\infty < x < \infty, t > 0\}$ уравнение

$$D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = (-1)^{n+1} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}, \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, D_{0t}^{α} – оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегродифференцирования порядка α, $0 < \alpha \le 1$, определяемый соотношением [1, с. 28].

Уравнение (1) при $n = 1$ широко исследовано. В частности в работе [2] решена задача Коши для уравнения диффузиии дробного порядка с регуляризованной дробной производной. В работе [3] построено фундаментальное решение, дано решение задачи Коши и доказана теорема единственности в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А.Н. Тихонова. В работе [4] найдено решение диффузионно-волнового уравнения четвертого порядка с регуляризованной дробной производной по времени. С помощью интегральных преобразований в работе [5] найдено решение задачи Коши для дробного диффузионно-волнового уравнения. Наиболее полную библиографию можно найти в работах [3], [6], [7]. При $\alpha = 1$ в работе [8] для уравнения (1) найдено решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в классе неограниченных функций. В работе [9] для уравнения (1) решена задача Коши в классе ограниченных функций. В данной работе получена оценка фундаментального решения уравнения (1).

В работе [9] построено фундаментальное решение для уравнения (1) в терминах функции вида

$$\Gamma(x,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\pi} \int_0^{\infty} E_{\frac{1}{\alpha}}(-\omega^{2n} t^{\alpha}; \alpha) \cos x\omega d\omega, \tag{2}$$

где $E_{\frac{1}{\alpha}}(-\omega^{2n} t^{\alpha}; \mu)$ – функция типа Миттаг-Леффлера [10, с. 117].

Докажем следующую

Лемму. Пусть $\alpha > 0, \beta > 0, \frac{\alpha}{2} - \gamma + 1 > 0$ и

$$v(a,b) = \int_0^{\infty} s^{\frac{\alpha}{2}-\gamma} \exp\left(-as^{-\beta} - bs^{\alpha}\right) ds,$$

тогда для $v(a,b)$ справедливо неравенство

$$v(a,b) \le C b^{-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}-\gamma+1\right)} \exp\left(-\rho a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} b^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right), \tag{3}$$

где C - положительная постоянная, не зависящая от a и b; $\rho < \rho_0 = \alpha^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left[\beta^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \beta^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]$ и может быть выбрано за счет выбора C , как угодно близко к ρ_0.

Доказательство. Пусть ε - произвольное, достаточно малое положительное число, тогда функцию $v(a,b)$ перепишем в виде

$$v(a,b) = \int_0^{\infty} s^{\frac{\alpha}{2}-\gamma} \exp(-f(s)) \exp(-\varepsilon b s^{\alpha}) ds, \tag{4}$$

где $f(s) = as^{-\beta} + (1-\varepsilon) b s^{\alpha}$.

Так как

$$\inf_{s>0} f(s) = a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left[(1-\varepsilon)\alpha b\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left[\beta^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}+\beta^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]$$

и учитывая, что $\sup\limits_{s>0}(-f(s)) = -\inf\limits_{s>0} f(s)$, тогда для функции (4) справедливо неравенство

$$v(a,b) \le \exp\left(-a^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left[(1-\varepsilon)\alpha b\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left[\beta^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}+\beta^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]\right)\int\limits_0^\infty s^{\frac{\alpha}{2}-\gamma}\exp\left(-\varepsilon b s^{\alpha}\right)ds. \quad (5)$$

Используя интегральное представление Гамма-функции, вычислим интеграл в (5)

$$\int\limits_0^\infty s^{\frac{\alpha}{2}-\gamma}\exp\left(-\varepsilon b s^{\alpha}\right)ds =$$

$$= \frac{1}{\alpha(\varepsilon b)^{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}-\gamma+1\right)}}\int\limits_0^\infty s^{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}-\gamma+1\right)-1}e^{-s}ds =$$

$$= \frac{1}{\alpha(\varepsilon b)^{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}-\gamma+1\right)}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right).$$

Подставляя вычесленный интеграл в (5), получим неравенство (3). Лемма доказана.

Теорема. *Для функции $\Gamma(x,t)$ при $0<\alpha\le 1$ справедливо следующее неравенство*

$$|\Gamma(x,t)| \le Ct^{\alpha-\frac{\alpha}{2n}-1}\exp\left(-\sigma|x|^{\frac{2n}{2n-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{2n-\alpha}}\right), \quad (6)$$

где C - положительная постоянная, не зависящая от x и t,

$$\sigma < \sigma_0 = \left(\frac{\alpha}{2n}\right)^{\frac{\alpha}{2n-\alpha}},$$

причем σ может быть выбрано за счет выбора C , как угодно близко к σ_0.

Доказательство.

Используя преобразование $A^{\alpha,\mu}v(x)$ [7]

$$A^{\alpha,\mu}v(x) = \int\limits_0^\infty v(t)x^{\mu-1}e^{1,\mu}_{1,\alpha}\left(-\frac{t}{x^{\alpha}}\right)dt,\ 0<\alpha<1,$$

и учитывая, что

$$A^{\xi,\eta}\exp(\lambda x) = x^{\xi+\eta-1}E_{\frac{1}{\xi}}(\lambda x^{\xi};\xi+\eta),$$

где $\lambda\in\mathbb{C}, \xi\in(0,1), \eta\in\mathbb{R}$, функцию $\Gamma(x,t)$ можно переписать в виде

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{\pi}A_t^{\alpha,0}\int\limits_0^\infty \exp(-\omega^{2n}t)\cos(x\omega)\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} A_t^{\alpha,0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\exp(-\omega^{2n} t + ix\omega) d\omega. \tag{7}$$

Для функции

$$G(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-t\omega^{2n} + ix\omega) d\omega$$

справедливо следующее неравенство [11]

$$|G(t,x)| \leq C(\delta) \exp\left(-\lambda |x|^{\frac{2n}{2n-1}} t^{-\frac{1}{2n-1}}\right) \left(\frac{|x|}{t}\right)^{\frac{1}{2n-1}}, \quad \frac{|x|^{2n}}{t} > \delta > 0, t > 0. \tag{8}$$

Из (8) будем иметь

$$|G(t,x)| \leq C t^{-\frac{1}{2n}} \exp\left(-C_0 |x|^{\frac{2n}{2n-1}} t^{-\frac{1}{2n-1}}\right), x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{9}$$

Учитывая положительность функции $e^{1,0}_{1,\alpha}(-z)$ при $z > 0$, для функции $\Gamma(x,t)$ получим следующее неравенство

$$|\Gamma(x,t)| \leq C A_t^{\alpha,0} t^{-\frac{1}{2n}} \exp\left[-C_0 \left(\frac{|x|}{t^{\frac{1}{2n}}}\right)^{\frac{2n}{2n-1}}\right], \tag{10}$$

где $C_0 < (2n)^{-\frac{2n}{2n-1}}[2n-1]$, C - положительная постоянная из неравенства (9).

Используя определение преобразования $A^{\alpha,\mu} f(x)$ [7], получим

$$|\Gamma(x,t)| \leq C t^{-1} \int\limits_0^{\infty} s^{-\frac{1}{2n}} \exp\left[-C_0 \left(\frac{|x|}{s^{\frac{1}{2n}}}\right)^{\frac{2n}{2n-1}}\right] e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\frac{s}{t^{\alpha}}\right) ds, \tag{11}$$

где $e^{1,\mu}_{1,\alpha}(x)$ - функция Райта [7].

Сделаем замену $s = s_1 t^{\alpha}$ в неравенстве (11)

$$|\Gamma(x,t)| \leq C t^{\alpha - \frac{\alpha}{2n} - 1} \int\limits_0^{\infty} s_1^{-\frac{1}{2n}} \exp\left(-C_0 |x|^{\frac{2n}{2n-1}} t^{-\frac{\alpha}{2n-1}} s_1^{-\frac{1}{2n-1}}\right) e^{1,0}_{1,\alpha}(-s_1) ds_1. \tag{12}$$

Для функции Райта справедливо асимптотическое разложение [12]

$$e^{1,\delta}_{1,\rho}(y) = \phi(-\rho, \delta; y) = Y^{\frac{1}{2}-\delta} e^{-Y} \left[\sum_{m=0}^{M-1} A_m Y^{-m} + O(Y^{-M})\right], \; y \to \infty,$$

где $\rho \in (0,1), Y = (1-\rho)\rho^{\rho/(1-\rho)} y^{1/(1-\rho)}$, коэффициенты A_m зависят от δ и ρ.

С учетом последнего разложения перепишем (12) в виде

$$|\Gamma(x,t)| \leq C t^{\alpha - \frac{\alpha}{2n} - 1} \int\limits_0^{\infty} s_1^{\frac{1}{2(1-\alpha)} - \frac{1}{2n}} \exp\left[-C_0 |x|^{\frac{2n}{2n-1}} t^{-\frac{\alpha}{2n-1}} s_1^{-\frac{1}{2n-1}} - (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} s_1^{\frac{1}{1-\alpha}}\right] ds_1 =$$

$$v\left(C_0 |x|^{\frac{2n}{2n-1}} t^{-\frac{\alpha}{2n-1}}, (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right), \tag{13}$$

где C - положительная постоянная, не зависящая от x и t.

Учитывая лемму 1, неравенство (13) примет вид (6). Теорема доказана. □

Список литературы/References

[1] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высш. шк., М., 1995, 301 с., [Nakhushev A. M., Uravneniya matematicheskoy biologii, Vyssh. shk., M., 1995, 301 p. (in Russian)].

[2] Кочубей А. Н., “Диффузия дробного порядка”, *Дифференциальные уравнения*, **26**:4 (1990), 660–670, [Kochubey A. N. Diffuziya drobnogo poryadka, Differentsial’nye uravneniya, 26:4 (1990), 660–670 (in Russian)].

[3] Псху А. В., “Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка”, *Изв. РАН Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 141–182, [Pskhu A. V. Fundamental’noe reshenie diffuzionno-volnovogo uravneniya drobnogo poryadka, Izv. RAN Ser. matem., 73:2 (2009), 141–182 (in Russian)].

[4] Agrawal O. P., “A general solution for a fourth-order fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain”, *Computers and Structures*, **79** (2001), 1497–1501.

[5] Ворошилов А. А., Килбас А. А., “Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто”, *Дифференциальные уравнения*, **42**:5 (2006), 599—609, [Voroshilov A. A., Kilbas A. A. Zadacha Koshi dlya diffuzionno-volnovogo uravneniya s chastnoy proizvodnoy Kaputo, Differentsial’nye uravneniya, 42:5 (2006), 599—609 (in Russian)].

[6] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, **204**, Elsevier Science, 2006, 540 с.

[7] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с., [Pskhu A. V., Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka, Nauka, M., 2005, 199 p. (in Russian)].

[8] Ладыженская О. А., “О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения”, *Математический сборник*, **27(69)**:2 (1950), 175–184, [Ladyzhenskaya O. A. O edinstvennosti resheniya zadachi Koshi dlya lineynogo parabolicheskogo uravneniya, Matematicheskiy sbornik, 27(69):2 (1950), 175–184 (in Russian)].

[9] Карашева Л. Л., “Задача Коши для параболического уравнения высокого порядка с производной Римана-Лиувилля по временной переменной”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **15**:2 (2013), 40–43, [Karasheva L. L. Zadacha Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya vysokogo poryadka s proizvodnoy Rimana-Liuvillya po vremennoy peremennoy, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk, 15:2 (2013), 40–43 (in Russian)].

[10] Джрбашян М. М., *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966, 672 с., [Dzhrbashyan M. M., Integral’nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti, Nauka, M., 1966, 672 p. (in Russian)].

[11] Гиндикин С. Г.,Федорюк М. В., “Асимптотика фундаментального решения параболического уравнения с постоянными коэффициентами”, *УМН*, **28**:1(169) (1973), 235–236, [Gindikin S. G.,Fedoryuk M. V. Asimptotika fundamental’nogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s postoyannymi koeffitsientami, UMN, 28:1(169) (1973), 235–236 (in Russian)].

[12] Wright E. M., “The generalized Bessel function of order greater than one”, *Quart. J. Math.*, **11** (1940), 36–48.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

[2] Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. №4. С. 660–670.

[3] Псху А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН Сер. матем. 2009. Т. 73. №2. С. 141–182

[4] Agrawal O. P. A general solution for a fourth-order fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // Computers and Structures. 2001. № 79. С. 1497–1501

[5] Ворошилов А. А., Килбас А. А. Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. №5. С. 599—609

[6] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations. vol. 204. Elsevier Science, 2006. 540 с.

[7] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

[8] Ладыженская О. А. О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения // Математический сборник. 1950. Т. 27(69). №2. С. 175–184

[9] Карашева Л. Л. Задача Коши для параболического уравнения высокого порядка с производной Римана-Лиувилля по временной переменной // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2013. Т. 15. №2. С. 40–43

[10] Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

[11] Гиндикин С. Г., Федорюк М. В. Асимптотика фундаментального решения параболического уравнения с постоянными коэффициентами // УМН. 1973. Т. 28. №1(169). С. 235–236

[12] Wright E. M. The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math.1940. №11. С. 36–48

Для цитирования: Карашева Л. Л. Оценка фундаментального решения уравнения параболического типа высокого порядка с производной Римана-Лиувилля по временной переменной // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). C. 32-37. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-32-37

For citation: Karasheva L. L. An estimate for the fundamental solution of high order parabolic equation with Riemann-Liouville derivative with respect to the time variable, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **16**: 4-1, 32-37. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-32-37

Поступила в редакцию / Original article submitted: 03.12.2016