Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). С. 27-31. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-27-31

УДК 517.95

МЕТОД ПРЯМЫХ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С. Х. Геккиева[1], Б. М. Керефов[2]

[1] Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

[2] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-mail: gekkieva_s@mail.ru, kerefov-1997@mail.ru

В работе исследована первая краевая задача для уравнения диффузии дробного порядка. Методом прямых получено решение в разностной форме.

Ключевые слова: уравнение диффузии, дробная производная, метод прямых.

MSC 35E99

METHOD OF LINES SOLUTION FOR SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFUSION EQUATION OF FRACTIONAL ORDER

S. Kh. Gekkieva[1], B. M. Kerefov[2]

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia

[2] Kabardino-Balkarian State University, 3600004, Nalchik, Chernyshevsky St, 173, Russia

E-mail: gekkieva_s@mail.ru, kerefov-1997@mail.ru

In the paper we study the first boundary value problem for the diffusion equation of fractional order. A solution in its difference form is obtained by the method of lines.

Key words: diffusion equation, fractional derivative, method of lines.

Введение

В настоящее время наблюдается заметный рост внимания исследователей к дробному исчислению. В первую очередь это обусловлено многочисленными эффективными приложениями дробного интегро-дифференцирования при описании широкого класса физических и химических процессов, протекающих во фрактальных средах, при математическом моделировании экономических и социально-биологических процессов [1–3]. В монографии [4] приведена подробная библиография по уравнениям в частных производных дробного порядка, в частности, рассматривается диффузионно-волновое уравнение. В работе [5] рассмотрены краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной.

Целью исследования является постановка и решение первой краевой задачи для уравнения диффузии с дробной производной в разностной форме.

Первая краевая задача в разностной форме

В области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения диффузии дробного порядка:

$$D_{0t}^{\alpha} u = (ku_x)_x + f(x,t), k(x,t) \geq c > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, D_{0t}^{\alpha-1}\big|_{t=0} = u_0(x). \tag{2}$$

Будем решать задачу (1)–(2) методом прямых [6]. Получим приближенное решение в виде системы функций, приближенно представляющих искомое решение вдоль прямых $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Для этого разобьем отрезок $[0,l]$ точками $x_i = ih$, $h = \frac{l}{N}$ и заменим производные по переменной x на разностные производные:

$$(k(x,t)u_x)_x \sim (a(x,t)u_{\bar{x}})_x = \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - a_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right),$$

$$a(x_i,t) = k(x_i - 0.5h, t) = k_{i-\frac{1}{2}}(t).$$

Тогда для сеточной функции $y(x_i,t)$ получим следующую систему уравнений метода прямых:

$$D_{0t}^{\alpha} y(x_i,t) = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}(t)-y_i(t)}{h} - a_i\frac{y_i(t)-y_{i-1}(t)}{h}\right] + \varphi(x_i,t),$$

$$\varphi(x_i,t) = \varphi(x_i,t) + O\left(h^2\right), a_i \geq c > 0, i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \tag{3}$$
$$y_0(t) = y_N(t) = 0, D_{0t}^{\alpha-1} y(x_i,0) = u_0(x_i),$$

где $y_i(t) = y(x_i,t)$, или:

$$\frac{5}{6}D_{0t}^{\alpha} y(x_i,t) + \frac{1}{12}\left(D_{0t}^{\alpha} y(x_{i+1},t) + D_{0t}^{\alpha} y(x_{i=1},t)\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left[a_{i+1}\frac{y_{i+1}(t)-y_i(t)}{h} - a_i\frac{y_i(t)-y_{i-1}(t)}{h}\right] + \frac{5}{6}\varphi(x_i,t) + \frac{1}{12}\left(\varphi(x_{k-1},t) + \varphi(x_{k+1},t)\right) + O\left(h^4\right), \tag{4}$$

$$a_i \geq c > 0, A > 0, i = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$y_0(t) = y_N(t) = 0, D_{0t}^{\alpha-1} y(x_i, 0) = u_0(x_i),$$

где $y_i(t) = y(x_i, t)$. При этом (3) дает аппроксимацию уравнения с точностью h^2, а (4) – с точностью h^4.

Сходимость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка (3), (4) доказывается методом априорных оценок.

Рассмотрим однородную систему уравнений, соответствующую системе (3) при $a_k = 1, k = 1, 2, \ldots, N-1$:

$$D_{0t}^{\alpha} y = \frac{1}{h^2}\left[(y_{k+1}(t) - 2y_k(t) + y_{k-1}(t))\right], \quad (5)$$
$$y_0(t) = y_N(t) = 0, D_{0t}^{\alpha-1} y(x_i, 0) = u_0(x_i), k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Общее решение системы (5) можно получить методом Фурье в виде [7]

$$y_{k,s}(t) = \sum_{s=1}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi s}{l} x_k\right) c_s T^{(k)}(0) t^{\alpha-1} \mathrm{E}_{1/\alpha}\left(-\delta_s t^{\alpha}; \alpha\right), \quad (6)$$

где c_s – произвольная постоянная, $E_{1/\alpha}(z; \nu)$ – функция Миттаг-Леффлера, $\delta_s^2 = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2l} x_s\right)$.

Аналогично можно получить общее решение однородной системы, соответствующей системе (4) при:

$$y_{k,s}(t) = \sum_{s=1}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi s}{l} x_k\right) d_s T^{(k)}(0) t^{\alpha-1} \mathrm{E}_{1/\alpha}\left(-\delta_s t^{\alpha}; \alpha\right),$$

где d_s – произвольная постоянная, $\delta_s^2 = \dfrac{24}{h^2\left(5 + \cos\frac{\pi}{l} x_s\right)}\sin^2\left(\frac{\pi}{2l} x_s\right)$.

Найдя методом вариации постоянных частное решение неоднородной системы (3), получим ее общее решение как сумму частного решения и построенного общего решения (6) однородной системы.

Рассмотрим следующий пример.

Пример. Построить методом прямых приближенное решение задачи

$$D_{0t}^{\alpha} u = u_{xx}, \quad (7)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, D_{0t}^{\alpha-1}|_{t=0} = \sin(x). \quad (8)$$

Отрезок $[0, \pi]$ разделим на четыре части и проведем через точки деления прямые.

Если $u_k(t)\,(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ – приближенные значения решения на прямых $x = \frac{\pi k}{4}\,(k = 0, 1, 2, 3, 4)$, то для отыскания $u_k(t)$ имеем систему уравнений (5). Таким образом, общее решение однородной системы получаем из (6). Из начальных условий имеем:

$$\lim t^{1-\alpha} y_{k,s}(t) = \lim t^{1-\alpha} \sum_{s=1}^{N-1} c_s T^{(k)}(0) t^{\alpha-1} \mathrm{E}_{1/\alpha}\left(-\delta_s^2 t^{\alpha}; \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi s}{l} x_k\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=1}^{N-1} c_s T^{(k)}(0) \sin\left(\frac{\pi s}{l} x_k\right) = \sin x,$$

Отсюда следует, что $c_s = 1$. Таким образом имеем:

$$y_{k,s}(t) = \Gamma(\alpha)\, t^{\alpha-1} \sum_{s=1}^{N-1} \mathrm{E}_{1/\alpha}\left(-\delta_s^2 t^{\alpha}; \alpha\right) \sin(x),$$

где $\delta_s^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi s x_s}{2l}\right), (s = 0,\ 1,\ ...,\ N-1)$.

Как известно [7], точное решение первой краевой задачи для уравнения (6) имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} \mathrm{E}_{1/\alpha}(-\lambda_k t^{\alpha}; \alpha) \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right),$$

где $\mathrm{E}_{1/\alpha}(-\lambda_k t^{\alpha}; \alpha) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{(-\lambda_k t^{\alpha})^s}{\Gamma(\alpha + \alpha s)}, \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$. Для решения задачи (7)–(8) на прямой $x = \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} \mathrm{E}_{1/\alpha}(-\lambda_k t^{\alpha}; \alpha) = \Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{-t^{\alpha s}}{\Gamma(\alpha + \alpha s)}.$$

Данные, полученные программированием в среде MAPLE, например, при $\alpha = \frac{1}{2}$ на прямой $x = \frac{\pi}{2}$ при аппроксимации уравнения с точностью h^2 выглядят следующим образом (табл. 1):

Таблица 1

t	0.5	1.0
Точное решение	0.4869	0.2421
Приближенное решение	0.5823	0.3025

При аппроксимации уравнения с точностью h^4 (табл. 2):

Таблица 2

t	0.5	1.0
Точное решение	0.4869	0.2421
Приближенное решение	0.5005	0.2506

Список литературы/References

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2003, 272 с., [Nakhushev A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie. Moskva. FIZMATLIT, 2003. 272 p. (in Russian)].

[2] Нахушева В. А., *Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов*, Наука, М., 2006, 173 с., [Nakhusheva V. A. Differentsial'nye uravneniya matematicheskikh modeley nelokal'nykh protsessov. M.: Nauka, 2006. 173 p. (in Russian)].

[3] Таукенова Ф. И., Шхануков-Лафишев М. Х., "Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **46**:10 (2006), 1871–1881, [Taukenova F. I., Shkhanukov-Lafishev M. Kh. Raznostnye metody resheniya kraevykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka // Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki. 2006. vol. 46, no 10. pp. 1871–1881 (in Russian)].

[4] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с., [Pskhu A. V. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka. Moskva. Nauka, 2005. 199 p. (in Russian)].

[5] Керефов М. А., *Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной*, Дис. ... канд. физ.-мат. наук, Нальчик, 2000, 75 с., [Kerefov M. A. Kraevye zadachi dlya modifitsirovannogo uravneniya vlagoperenosa s drobnoy po vremeni proizvodnoy: Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. Nal'chik, 2000. 75 p. (in Russian)].

[6] Березин И. С., Жидков Н. П, *Методы вычислений*. Т. 2, ГИФМЛ, 1962, 640 с., [Berezin I. S. Zhidkov N. P. Metody vychisleniy. vol. 2. GIFML. 1962. – 640 p. (in Russian)].

[7] Геккиева С. Х., *Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени*, Дис. ... канд. физ.-мат. наук, Нальчик, 2003, 75 с., [Gekkieva S. Kh. Kraevye zadachi dlya nagruzhennykh parabolicheskikh uravneniy s drobnoy proizvodnoy po vremeni: Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. Nal'chik, 2003. 75 p. (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

[2] Нахушева В. А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с.

[3] Таукенова Ф. И., Шхануков-Лафишев М. Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики.2006. Т. 46. № 10. С. 1871–1881

[4] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

[5] Керефов М. А. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса с дробной по времени производной. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 2000. 75 с.

[6] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. ГИФМЛ,1962. 640 с.

[7] Геккиева С. Х. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нальчик, 2003. 75 с.

Для цитирования: Геккиева С. Х., Керефов Б. М. Метод прямых решения первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). C. 27-31. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-27-31

For citation: Gekkieva S. Kh., Kerefov B. M. Method of lines solution for solution of the first boundary value problem for diffusion equation of fractional order, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **16**: 4-1, 27-31. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-27-31

Поступила в редакцию / Original article submitted: 25.11.2016