Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). C. 21-26. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-21-26

УДК 517.925.4

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ *

Ф. Т. Богатырева

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: fatima_bogatyreva@bk.ru

В данной работе строится явное представление решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с операторами Джрбашяна-Нерсесяна.

Ключевые слова: задача Коши, дробная производная, оператор Джрбашяна-Нерсесяна.

MSC 34L99

INITIAL VALUE PROBLEM FOR FRACTIONAL ORDER EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS

F. T. Bogatyreva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia

E-mail: fatima_bogatyreva@bk.ru

In this paper we construct an explicit representation of the solution of the Cauchy problem for ordinary differential equation of fractional order with Dzhrbashyan-Nersesyan operators.

Key words: Cauchy problem, fractional derivative, Dzhrbashyan-Nersesyan operator.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00462)

Введение

Пусть

$$\{\gamma_k\}_0^n \equiv \{\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n\} \tag{1}$$

– произвольная совокупность вещественных чисел, подчиненных условию

$$0 < \gamma_k \leq 1 \ (k = 0, 1, ..., n).$$

Обозначим

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j - 1$$

и всюду дальше положим

$$\alpha_n = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j - 1 > 0.$$

Оператор дробного дифференцирования порядка α_n, ассоциированный с последовательностью (1) называется оператором Джрбашяна-Нерсесяна и определяется соотношением [1]

$$D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n\}} u(x) = D_{0x}^{\gamma_n - 1} D_{0x}^{\gamma_{n-1}} ... D_{0x}^{\gamma_1} D_{0x}^{\gamma_0} u(x), \tag{2}$$

где D_{0x}^{γ}– оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка γ с началом в точке $x = 0$ определяемый следующим образом [2, с. 9]

$$D_{0x}^{\gamma} g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int\limits_0^x \frac{g(t)}{|x-t|^{\gamma+1}} dt, & \gamma < 0, \\ g(x), & \gamma = 0, \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^p D_{0x}^{\gamma - p} g(x), & p - 1 < \gamma \leq p, \, p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Отметим, что частными случаями оператора (2) являются операторы Римана-Лиувилля и Капуто. А именно, в случае, когда $\{\gamma_k\}_0^n = \{\alpha - n + 1, 1, ..., 1\}$, оператор Джрбашяна-Нерсесяна совпадает с производной Римана-Лиувилля

$$D_{0x}^{\{\alpha - m+1, 1, ..., 1\}} = D_{0x}^{\alpha}, \ m - 1 < \alpha \leq m,$$

в случае $\{\gamma_k\}_0^n = \{1, ..., 1, \alpha - n + 1\}$ с производной Капуто

$$D_{0x}^{\{1, ..., 1, \alpha - m+1\}} = \partial_{0x}^{\alpha}, \ m - 1 < \alpha \leq m.$$

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_k\}} u(x) = f(x), \tag{3}$$

где a_k– комплексные постоянные, $f(x)$– заданная функция.

В работе [1] рассматривалась задача Коши для уравнения (3) с переменными коэффициентами. Исследуемая задача эквивалентно сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Доказана теорема существования и единственности решения. В работе [3] для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка вида (3) с производными Римана-Лиувилля была сформулирована и решена начальная задача. В работе [4] для уравнения (3), в случае оператора Капуто, решены задачи Дирихле и Неймана.

В данной работе в терминах функции Райта строится явное представление решения задачи Коши для уравнения (3).

Постановка задачи и методика ее решения

Регулярным решением уравнения (3) назовем функцию $u(x) \in L[0,1]$, такую что $D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_j\}}u(x) \in AC[0,1]$, $0 \le j \le n-1$, и удовлетворяет уравнению (3) в интервале [0,1].

Задача. *Найти регулярное решение уравнения* (3) *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_j\}}u(x) = u_j, \quad 0 \le j \le n-1. \tag{4}$$

Обозначим [3]:

$$G^{\alpha_n}(x) = G_n^{\alpha_n}(x, z_0, \dots, z_{n-1}, \beta_0, \dots \beta_{n-1}) = \int_0^\infty e^{-t} S_n^{\alpha_n}(x, z_0 t, \dots, z_{n-1}t, \beta_0, \dots \beta_{n-1})dt,$$

$$S_n^{\alpha_n}(x, z_0, \dots, z_{n-1}, \beta_0, \dots \beta_{n-1}) = (h_1 * h_2 * \dots h_{n-1})(x),$$

где $(\varphi * \psi)(x) = \int\limits_0^x \varphi(x-t)\psi(t)dt-$ свертка Лапласса функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$,

$$h_i = h_i(x) = x^{\alpha_n - 1}\phi(\beta_i; \alpha_n, z_i x^{\beta_i}),\ \beta_i = \alpha_n - \alpha_i,\ z_i = -s\frac{a_i}{a_n},\ i = 0, 1, \dots, n-1,$$

$\phi(\xi,\eta;z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\xi n+\eta)}$ – функция типа Райта [5].

Для функции G^μ имеют место следующие соотношения

$$G^\mu(x) = O(x^{\mu-1}) \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{5}$$

$$D_{0x}^\nu G^\mu(x) = G_n^{\mu-\nu}(x), \quad \text{если} \quad \mu > \nu, \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_k\}} a_k G^\mu(x) = a_n \frac{x^{\mu-\alpha_n-1}}{\Gamma(\mu-\alpha_n)}. \tag{7}$$

Доказательства равенств (5) и (6) приведены в работе [3]. Доказательство равенства (7) так же следует из доказательства формулы (37) работы [3].

Теорема. *Пусть* $a_n \neq 0$, $\gamma_0 + \gamma_n > 1$ *и функция* $f(x)$ *представима в виде*

$$f(x) = D_{0x}^{\gamma_n - 1}g(x),\ g(x) \in L[0,1]. \tag{8}$$

Тогда в области $[0,1]$ *существует единственное регулярное решение задачи* (3), (4). *Решение имеет вид*

$$u(x) = \frac{1}{a_n}\int_0^x G^{\alpha_n}(x-t)f(t)dt + \frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \sum_{m=k+1}^{n} a_m G^{\alpha_n-\alpha_m+\mu_k}(x). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ регулярное решение уравнения (3). Умножим обе части уравнения (3) на функцию $G^{\alpha_n+1}(x,t)$ и проинтегрируем по x.

$$\sum_{k=0}^{n}\int_0^x a_k G^{\alpha_n+1}(x-t)D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1\dots,\gamma_k\}}u(t)dt=\int_0^x G^{\alpha_n+1}(x-t)f(t)dt. \qquad (10)$$

Обозначим через

$$S_k=\sum_{j=0}^{k}a_j\int_0^x G^{\alpha_n+1}(x-t)D_{0x}^{\{\gamma_0,\gamma_1\dots,\gamma_j\}}u(t)dt.$$

Тогда

$$S_0=a_0\int_0^x G^{\alpha_n+1}(x-t)D_{0t}^{\gamma_0-1}u(t)dt=a_0\int_0^x u(t)D_{xt}^{\gamma_0-1}G^{\alpha_n+1}(x-t)dt.$$

$$S_1=S_0+a_1D_{xt}^{\gamma_1-1}G^{\alpha_n+1}(x-t)D_{0t}^{\gamma_0-1}u(t)\Big|_0^x+a_1\int_0^x u(t)D_{xt}^{\{\gamma_1,\gamma_0\}}G^{\alpha_n+1}(x-t)dt,$$

$$S_2=S_1+a_2D_{xt}^{\gamma_2-1}G^{\alpha_n+1}(x-t)D_{0t}^{\{\gamma_0,\gamma_1\}}u(t)\Big|_0^x+a_2\,D_{xt}^{\{\gamma_2,\gamma_1\}}G^{\alpha_n+1}(x-t)D_{0t}^{\gamma_0-1}u(t)\Big|_0^x+$$

$$+a_2\int_0^x u(t)D_{xt}^{\{\gamma_2,\gamma_1,\gamma_0\}}G^{\alpha_n+1}(x-t)dt.$$

Повторяя те же рассуждения получим

$$S_n=S_{n-1}+a_n\,D_{xt}^{\gamma_n-1}G^{\alpha_n+1}(x-t)D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_n\}}u(t)\Big|_0^x+a_n\,D_{xt}^{\{\gamma_n,\gamma_{n-1}\}}G^{\alpha_n+1}(x-t)D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_{n-2}\}}u(t)\Big|_0^x+$$

$$+\ldots+a_n\,D_{xt}^{\{\gamma_n,\dots,\gamma_1\}}G^{\alpha_n+1}(x-t)D_{0t}^{\gamma_0-1}u(t)\Big|_0^x+a_n\int_0^x u(t)D_{xt}^{\{\gamma_n,\dots,\gamma_0\}}G^{\alpha_n+1}(x-t)dt. \qquad (11)$$

Разрешая (11) относительно S_n будем иметь

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\int_0^x a_kD_{xt}^{\{\gamma_k,\gamma_{k-1},\dots\gamma_0\}}G^{\alpha_n+1}(x-t)u(t)dt-$$

$$-\sum_{m=1}^{n}a_m\sum_{k=0}^{m-1}D_{xt}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_{k+1}\}}G^{\alpha_n+1}(x-t)D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}}u(t)\Big|_0^x.$$

Откуда учитывая (10) приходим к равенству

$$\sum_{k=0}^{n}\int_0^x a_kD_{xt}^{\{\gamma_k,\gamma_{k-1},\dots\gamma_0\}}G^{\alpha_n+1}(x-t)u(t)dt-$$

$$-\sum_{m=1}^{n}a_m\sum_{k=0}^{m-1}D_{xt}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_{k+1}\}}G^{\alpha_n+1}(x-t)D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}}u(t)\Big|_0^x=\int_0^x G^{\alpha_n+1}(x-t)f(t)dt. \qquad (12)$$

С учетом начального условия (4) и

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D_{xt}^{\{\gamma_k,\gamma_{k-1},\cdots\gamma_0\}} G^{\alpha_n+1}(x-t) = a_n,$$

$$\lim_{t\to x} D_{xt}^{\{\gamma_m,\ldots,\gamma_{k+1}\}} G^{\alpha_n+1}(x-t) = 0,\ m=\overline{1,\ldots,n};\ k=\overline{0,\ldots,m-1},$$

меняя порядок суммирования, имеем, что

$$a_n \int_0^x u(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \sum_{m=k+1}^{n} a_m G^{\alpha_n-\alpha_m+\mu_k+1}(x) = \int_0^x G^{\alpha_n+1}(x-t) f(t)dt.$$

Разделив всё выражение на a_n и дифференцируя его по x получаем требуемое представление (9).

Список литературы/References

[1] Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б., "Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка", *Изв. АН АрмССР. Матем.*, **3**:1 (1968), 3-28, [Dzhrbashyan M.M., Nersesyan A.B. Drobnye proizvodnye i zadacha Koshi dlya differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka, Izv. AN ArmSSR. Matem., 3:1 (1968), 3-28 (in Russian)].

[2] Нахушев А.М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с., [Nakhushev A.M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie, Fizmatlit, M., 2003, 272 p.].

[3] Псху А.В., "Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка", *Математический сборник*, **202**:4 (2011), 111-122, [Pskhu A.V. Nachal'naya zadacha dlya lineynogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya drobnogo poryadka, Matematicheskiy sbornik, 202:4 (2011), 111-122 (in Russian)].

[4] Гадзова Л.Х., "Задачи Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами", *Дифференциальные уравнения*, **51**:12 (2015), 1580-1586, [Gadzova L.Kh. Zadachi Dirikhle i Neymana dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya drobnogo poryadka s postoyannymi koeffitsientami, Differentsial'nye uravneniya, 51:12 (2015), 1580-1586 (in Russian)].

[5] Wright E.M., "On the coefficients of power series having exponential singularities", *J. London Math. Soc.*, **8**:1 (1933), 71-79.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. Дробное производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Матем. 1968. Т. 3. №1. С. 3-28.

[2] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[3] Псху А. В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Математический сборник. 2011. Т. 202. №4. С. 111-122

[4] Гадзова Л. Х. Задачи Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2015 Т. 51. №12. С. 1580-1586

[5] Wright E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. T. 8. no 1. pp.71-79

Для цитирования: Богатырева Ф. Т. Начальная задача для уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). С. 21-26. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-21-26

For citation: Bogatyreva F. T. Initial value problem for fractional order equation with constant coefficients, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **16**: 4-1, 21-26. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-21-26

Поступила в редакцию / Original article submitted: 02.12.2016