Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). С. 15-20. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-15-20

УДК 517.956.6

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

Ж. А. Балкизов, А. А. Сокуров

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: Giraslan@yandex

Доказана теорема об априорной оценке решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе, из которой, в частности, следует единственность регулярного решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, задача Трикоми, уравнение Лаврентьева-Бицадзе, априорная оценка решения задачи

MSC 35M12

ABOUT THE A PRIORI ESTIMATE FOR SOLUTION OF TRICOMI PROBLEM FOR THE LAVRENTIEV-BITSADZE EQUATION

Zh. A. Balkizov, A. A. Sokurov

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia

E-mail: Giraslan@yandex

The theorem about the a priori estimate for the solution of Tricomi problem for Lavrentiev-Bitsadze equation is proved. From this theorem, in particular, follows the uniqueness of a regular solution of the investigated problem.

Key words: mixed type equation, Tricomi problem, Lavrentiev-Bitsadze equation, a priori estimate for the solution of the problem

Введение

Уравнение Лаврентьева-Бицадзе (ЛБ) в работах [1]–[2] предложено как более простая модель уранений смешанного типа в смысле постановки и исследования смешанных задач. Методом сингулярных интегральных уравнений в работах [1]–[4] решена задача Трикоми для уравнения (ЛБ) для различных областей в эллиптической части. В данной работе получена априорная оценка решения задачи Трикоми для уравнения (ЛБ) в случае, когда область эллиптичности ограницена прямоугольником. Уравнение (ЛБ) встречается при решении таких важных вопросов прикладного характера, как задачи теории бесконечно малых изгибаний поверхностей вращения, задачи безмоментной теории оболочек и т.д. Значительную роль такие уравнения играют и в задачах газовой динамики [5].

Постановка задачи

На евклидовой плоскости независимых переменных x и t рассмотрим уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$u_{xx}+\operatorname{sgn}t\,u_{tt}=-f(x,t), \tag{1}$$

где $u=u(x,t)$ – искомая функция; $\operatorname{sgn}t$ – знак числа t;
$f(x,t)=\begin{cases} f^{+}(x,t) & \text{при } t>0, \\ f^{-}(x,t) & \text{при } t<0 \end{cases}$ – заданная функция.

Через Ω обозначим область, ограниченную при $t<0$ характеристиками $AC: x+t=0$ и $CB: x-t=l$ уравнения (1), выходящими из точек $A=(0,0)$ и $B=(l,0)$, пересекающимися в точке $C=(l/2,-l/2)$, а также прямоугольником с вершинами в точках $A, B, A_0=(0,T), B_0=(l,T)$ при $t>0$, $l>0, T>0$. Верхнюю часть области Ω обозначим через Ω^{+}, а нижнюю через Ω^{-}.

Уравнение (1) является уравнением смешанного типа: оно эллиптично в области Ω^{+} и гиперболично в Ω^{-}.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем всякую функцию $u=u(x,t)$ из класса $C(\overline{\Omega})\cap C^{1}(\Omega)\cap C^{2}(\Omega^{+})\cap C^{2}(\Omega^{-})$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

В работе исследуется задача Трикоми для уравнения (1) в следующей постановке.

Задача T. Найти регулярное в области Ω решение $u=u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(l,t)=u_1(t), \quad u(0,t)=u_3(t), \qquad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{2}$$

$$u(x,T)=u_2(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{3}$$

$$u(x,-x)=\psi(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l/2, \tag{4}$$

где $u_1(t), u_2(x), u_3(t), \psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции и выполнены условия согласования: $u_3(0)=\psi(0), u_3(T)=u_2(0), u_2(l)=u_1(T)$.

В дальнейшем будем предполагать, что $f(x,t)\in C(\overline{\Omega})$ и решение задачи (1) – (4) существует. Решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω^{-} можно представить в виде

$$u(x,t)=\frac{\tau(x+t)+\tau(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\nu(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-t+\eta}^{x+t-\eta}f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \tag{5}$$

где $\tau(x) = u(x,0)$, $\nu(x) = u_t(x,0)$. Учитывая условие (4) из (5) получим

$$u(x,-x) = \frac{\tau(0)+\tau(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{2x}^{0} \nu(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-x}\int\limits_{2x+\eta}^{-\eta} f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = \psi(x),$$

или

$$\frac{\tau(0)+\tau(x)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{0} \nu(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{-x/2}\int\limits_{x+\eta}^{-\eta} f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = \psi\left(\frac{x}{2}\right). \tag{6}$$

Дифференцируя (6) находим

$$\frac{d\tau}{dx}(x) - \nu(x) = u_x(x,0) - u_t(x,0) = \psi'\left(\frac{x}{2}\right) + \int\limits_{0}^{-x/2} f(x+\eta,\eta)\,d\eta, \tag{7}$$

откуда

$$\nu(x) = \tau'(x) - \psi'\left(\frac{x}{2}\right) - \int\limits_{0}^{-x/2} f(x+\eta,\eta)\,d\eta. \tag{8}$$

Соотношение (8) – есть фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω^- на линию $y=0$. Подставляя $\nu(x)$ из (8) в (5), находим решение первой задачи Дарбу для уравнения (1) в области Ω^-:

$$u(x,t) = \tau(x+t) - \psi\left(\frac{x+t}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-t}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\int\limits_{0}^{-\xi/2} f(\xi+\eta,\eta)\,d\eta d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-t+\eta}^{x+t-\eta} f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta. \tag{9}$$

Для определения значения искомой функции u в области $\overline{\Omega}^+$ с учетом найденного выше фундаментального соотношения приходим к задаче (2), (3) и (8) для уравнения (1).

Априорная оценка

Обозначим через $\Omega_\varepsilon^+ = \{(x,t) : \varepsilon < x < l-\varepsilon, \varepsilon < t < T-\varepsilon\}$, где ε – произвольное, достаточно малое положительное число. Полагая условия (2) – (3) однородными, умножим уравнение (1) на $u(x,t)$ и проинтегрируем по вспомогательной области Ω_ε^+. Применяя затем к полученному равенству формулу Грина, будем иметь

$$\iint\limits_{\Omega_\varepsilon^+} u(x,t)\left[u_{xx}(x,t) + u_{tt}(x,t)\right] dxdt = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^+} -u(x,t)\,u_t(x,t)\,dx + u(x,t)\,u_x(x,t)\,dt -$$

$$-\iint\limits_{\Omega_\varepsilon^+} \left[u_x^2(x,t) + u_t^2(x,t)\right] dxdt = -\iint\limits_{\Omega_\varepsilon^+} u(x,t)\,f(x,t)\,dxdt, \tag{10}$$

где Γ_ε^+ – граница вспомогательной области Ω_ε^+.

Перейдем в равенстве (10) к пределу при $\varepsilon \to 0$. Легко заметить, что при этом область Ω_ε^+ переходит в Ω^+, а граница Γ_ε^+ вспомогательной области Ω_ε^+ переходит в границу Γ^+ области Ω^+. Тогда из (10) получим

$$\iint\limits_{\Omega^+} u(x,t)\left[u_{xx}(x,t)+u_{tt}(x,t)\right]dxdt = \int\limits_{\Gamma^+} -u(x,t)\,u_t(x,t)\,dx + u(x,t)\,u_x(x,t)\,dt -$$

$$-\iint\limits_{\Omega^+}\left[u_x^2(x,t)+u_t^2(x,t)\right]dxdt = -\iint\limits_{\Omega^+} u(x,t)\,f(x,t)\,dxdt, \tag{11}$$

откуда с учетом однородных граничных условий (2) – (3) находим

$$\int\limits_0^l u(x,0)\,u_t(x,0)\,dx + \|u_x\|_0^2 + \|u_t\|_0^2 = \iint\limits_{\Omega^+} u(x,t)\,f(x,t)\,dxdt. \tag{12}$$

Подставляя $u_t(x,0)$ из (7) в (12), приходим к равенству:

$$\int\limits_0^l -u(x,0)\,\chi(x)\,dx + \|u_x\|_0^2 + \|u_t\|_0^2 = \iint\limits_{\Omega^+} u(x,t)\,f(x,t)\,dxdt, \tag{13}$$

где $\chi(x) = \psi'\left(\frac{x}{2}\right) + \int\limits_0^{-x/2} f(x+\eta,\eta)\,d\eta$.

Пользуясь ε-неравенством убеждаемся в справедливости неравенств:

$$\iint\limits_{\Omega^+} u(x,t)\,f(x,t)\,dxdt \leqslant \iint\limits_{\Omega^+}\left[\varepsilon_1 u^2(x,t) + \frac{1}{4\varepsilon_1} f^2(x,t)\right]dxdt = \varepsilon_1\|u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\|f\|_0^2 \tag{14}$$

и

$$\int\limits_0^l -u(x,0)\,\chi(x)\,dx \geqslant \int\limits_0^l\left[-\varepsilon_2 u^2(x,0) - \frac{1}{4\varepsilon_2}\chi^2(x)\right]dx =$$

$$= -\varepsilon_2\int\limits_0^l u^2(x,0)\,dx - \frac{1}{4\varepsilon_2}\|\chi\|_0^2. \tag{15}$$

С учетом (14) – (15) неравенство (13) перепишется в следующем виде

$$-\varepsilon_2\int\limits_0^l u^2(x,0)\,dx - \frac{1}{4\varepsilon_2}\|\chi\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u_t\|_0^2 \leqslant \varepsilon_1\|u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\|f\|_0^2. \tag{16}$$

Найдем теперь оценку для $\int\limits_0^l u^2(x,0)\,dx$. Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, с учетом условия (3), получаем:

$$\int\limits_0^l u^2(x,0)\,dx = \int\limits_0^l\left(\int\limits_0^T u_t(x,t)\,dt\right)^2 dx \leqslant \int\limits_0^l\left(T\int\limits_0^T u_t^2(x,t)\,dt\right)dx =$$

$$= T\int\limits_0^l\int\limits_0^T u_t^2(x,t)\,dxdt = T\iint\limits_{\Omega^+} u_t^2(x,t)\,dxdt = T\,\|u_t\|_0^2. \tag{17}$$

С учетом (17) неравенство (16) перепишется в следующем виде

$$\|u_x\|_0^2 + (1-\varepsilon_2 T)\,\|u_t\|_0^2 \leqslant \varepsilon_1\,\|u\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1}\,\|f\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2}\,\|\chi\|_0^2. \tag{18}$$

Оценим далее $\|u_x\|_0^2$. Для этого заметим, что

$$u^2(x,t) = \left(\int\limits_0^x u_s(s,t)\,ds\right)^2 \leqslant x\int\limits_0^x u_s^2(s,t)\,ds \leqslant x\int\limits_0^l u_x^2(x,t)\,dx. \tag{19}$$

Проинтегрируем неравенство (19) сначала по x от 0 до l, а затем по t от 0 до T. Будем иметь

$$\int\limits_0^l u^2(x,t)\,dx \leqslant \frac{l^2}{2}\int\limits_0^l u_x^2(x,t)\,dx, \tag{20}$$

$$\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^l u^2(x,t)\,dx\right)dt = \iint\limits_{\Omega^+} u^2(x,t)\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l^2}{2}\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^l u_x^2(x,t)\,dx\right)dt = \frac{l^2}{2}\iint\limits_{\Omega^+} u_x^2(x,t)\,dxdt. \tag{21}$$

Или же окончательно

$$\frac{2}{l^2}\,\|u\|_0^2 \leqslant \|u_x\|_0^2. \tag{22}$$

Для оценки $\|u_t\|_0^2$ проинтегрируем неравенство

$$u^2(x,t) = \left(-\int\limits_t^T u_s(x,s)\,ds\right)^2 \leq t\int\limits_0^T u_t^2(x,t)\,dt$$

по области Ω^+, и, рассуждая аналогично, найдем:

$$\frac{2}{T^2}\,\|u\|_0^2 \leqslant \|u_t\|_0^2. \tag{23}$$

С учетом (22) и (23) из (18) получаем

$$M\,\|u\|_0^2 \leqslant \frac{1}{4\varepsilon_1}\,\|f\|_0^2 + \frac{1}{4\varepsilon_2}\,\|\chi\|_0^2, \tag{24}$$

где $M = \frac{2}{l^2} + \frac{2}{T^2} - \frac{2\varepsilon_2}{T} - \varepsilon_1$.

В силу произвольности ε_1 и ε_2 число M можно выбрать положительным. Тогда окончательно получим

$$\|u\|_0^2 \leqslant M_1\,\|f\|_0^2 + M_2\,\|\chi\|_0^2, \tag{25}$$

где $M_1 = \frac{1}{4\varepsilon_1 M}$, $M_2 = \frac{1}{\varepsilon_2 M}$.

Из априорной оценки (25) следует единственность регулярного решения исследуемой задачи.

Список литературы/References

[1] Лаврентьев М.А., Бицадзе А.В., “К проблеме уравнений смешаннного типа”, *Доклады АН СССР*, **70**:3 (1950), 373–376, [Lavrent’ev M.A., Bitsadze A.V., K probleme uravneniy smeshannnogo tipa, Doklady AN SSSR, 70:3 (1950), 373–376 (in Russian)].

[2] Бицадзе А.В., *Уравнения смешанного типа*, Издательство Академии наук СССР, М., 1959, 164 с., [Bitsadze A.V., Uravneniya smeshannogo tipa, Izdatel’stvo Akademii nauk SSSR, M., 1959, 164 p. (in Russian)].

[3] Чибрикова Л.И., “К решению краевой задачи Трикоми для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0$”, *Ученые записки Казанского университета*, **117**:9 (1957), 48–51, [Chibrikova L.I. K resheniyu kraevoy zadachi Trikomi dlya uravneniya $u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0$, Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta, 117:9 (1957), 48–51 (in Russian)].

[4] Крикунов Ю.М., “К задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе”, *Известия ВУЗов. Математика*, 1974, №2, 76–81, [Krikunov Yu.M. K zadache Trikomi dlya uravneniya Lavrent’eva-Bitsadze, Izvestiya VUZov. Matematika, 1974, №2, 76–81 (in Russian)].

[5] Франкль Ф.И., “Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева-Бицадзе”, *Вестник ЛГУ. Серия математика, механика и астрономия*, **6**:11 (1951), 3–7, [Frankl’ F.I. Dva gazodinamicheskikh prilozheniya kraevoy zadachi Lavrent’eva-Bitsadze, Vestnik LGU. Seriya matematika, mekhanika i astronomiya, 6:11 (1951), 3–7 (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Лаврентьев М. А., Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешаннного типа // Доклады АН СССР. 1950. Т. 70. №3. С. 373–376

[2] Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М.: Издательство Академии наук СССР, 1959. 164 с.

[3] Чибрикова Л. И. К решению краевые задачи Трикоми для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0$ // Ученые записки Казанского университета. 1957. Т. 117. №9. 48–51

[4] Крикунов Ю. М. К задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Известия ВУЗов. Математика. 1974. №2. С. 76–81

[5] Франкль Ф. И. Два газодинамических приложения краевоq задачи Лаврентьева-Бицадзе // Вестник ЛГУ. Серия математика, механика и астрономия. 1951. Т. 6. № 11. С. 3–7.

Для цитирования: Балкизов Ж. А., Сокуров А. А. Об априорной оценке решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). С. 15-20. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-15-20

For citation: Balkizov Zh. A., Sokurov A. A. About the a priori estimate for solution of Tricomi problem for the Lavrentiev-Bitsadze equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **16**: 4-1, 15-20. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-15-20

Поступила в редакцию / Original article submitted: 23.11.2016