Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). C. 9-14. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-9-14

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А. Х. Аттаев

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

В работе для уравнения вида $u_x + u_y = \lambda u_x(x,0) + \mu u_y(0,y)$ проводится исследование на корректность ряда начальных задач как в ограниченной, так и в неограниченной областях.

Ключевые слова: уравнение в частных производных первого порядка, нагруженное уравнение, начальная задача, регулярное решение

MATHEMATICS

MSC 35M12

ON SOME PROBLEMS FOR LOADED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIRST ORDER

A. Kh. Attaev

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia

E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

For equations of the form $u_x + u_y = \lambda u_x(x,0) + \mu u_y(0,y)$ the investigation on the correctness
of the number of initial value problems in bounded and unbounded domains.

Key words: partial equation of the first order, loaded equation, initial value problem, regular solution.

Введение

В работе объектом исследования является уравнение вида

$$u_x + u_y = \lambda\, u_x(x,0) + \mu\, u_y(0,y), \tag{1}$$

где λ, μ заданные действительные константы.

Уравнение (1) относится к классу нагруженных дифференциальных уравнений [1]. В работе [2] нагруженные дифференциальные уравнения, когда порядок производной нагруженного слагаемого не меньше порядка уравнения, названы существенно нагруженными дифференциальными уравнениями. В ряде работ [3]-[8] исследован эффект влияния "нагрузки"на корректную постановку тех или иных начально краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных второго порядка гиперболического и параболического типов. Ниже будут приведены примеры начальных задач корректных для уравнения $u_x + u_y = 0$ и некорректных для уравнения (1) и наоборот, некорректных для уравнения $u_x + u_y = 0$ и корректных для уравнения (1).

Представление решения

В уравнении (1) сделаем замену функции $u(x,y)$ на $\upsilon(x,y)$ по формуле

$$u(x,y) = \upsilon(x,y) + \alpha\, \upsilon(x,0) + \beta\, \upsilon(0,y). \tag{2}$$

Подставив (2) в (1) и приравнивая нулю коэффициенты при $\upsilon_x(x,0)$ и $\upsilon_y(0,y)$ соответственно, получим

$$\alpha = \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad \beta = \frac{\mu}{1-\mu} \tag{3}$$

при условии, что $\lambda \neq 1$ и $\mu \neq 1$.

При этом уравнение (1) переходит в уравнение

$$\upsilon_x + \upsilon_y = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\upsilon(x,y) = f(x-y).$$

Следовательно, любое регулярное решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x,y) = f(x-y) + \alpha\, f(x) + \beta\, f(-y), \tag{4}$$

где $f(x)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция, а α и β определяются по формуле (3).

Начальные задачи

Задача 1. *Найти регулярное решение уравнения* (1) *при условии*

$$u(x,a) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < a < \infty. \tag{5}$$

Известно, что задача 1 для уравнения

$$u_x + u_y = 0$$

имеет единственное решение

$$u(x,y) = \varphi(x - y + a) \quad \forall\ a \in]-\infty, \infty[.$$

Теорема 1.1. *Пусть $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$, $\mu \neq 1$, $a \neq 0$. Тогда однородная задача, соответствующая задаче 1 для уравнения* (1) *имеет бесчисленное множество решений.*

Доказательство. Удовлетворяя (4) условию (5), когда $\varphi(x) = 0$, получим

$$f(x-a) + \alpha f(x) + \beta f(-a) = 0. \tag{6}$$

Пусть $a > 0$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция $f(x)$, представимая в виде

$$f(x) = (-\alpha)^n g(x - an), \ an \leqslant x \leqslant a(n+1), \ n \in \mathbb{Z},$$

$g : [0,a] \to \mathbb{R}$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям

$$g(0) = g(a) = g'(0) = g'(a) = 0,$$

является непрерывно дифференцируемым решением уравнения (6).

В случае $a < 0$ можно провести аналогичные рассуждения. Итак, мы доказали, что однородная задача имеет бесчисленное множество решений.

Задача 2. *Найти регулярное решение уравнения* (1) *при условии*

$$u(a,y) = \varphi(y), \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < a < \infty. \tag{7}$$

Теорема 2.1. *Пусть $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 1$, $\mu \neq 1$, $a \neq 0$. Тогда однородная задача, соответствующая задаче 2 для уравнения* (1) *имеет бесчисленное множество решений.*

Доказательство теоремы 2.1 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.1.

Как известно, единственное решение задачи 2 для уравнения

$$u_x + u_y = 0$$

выписывается по формуле

$$u(x,y) = \varphi(y - x + a) \quad \forall\ \alpha \in]-\infty, \infty[.$$

Теорема 1.2. *Пусть $\lambda \neq 1$, $\mu \neq 1$, $a = 0$. Тогда задача 1 имеет единственное решение и оно представимо в виде*

$$u(x,y) = \frac{1}{1+\alpha}\left[\varphi(x-y) + \alpha\,\varphi(x) + \beta\,\varphi(-y) - \beta\,\varphi(0)\right]. \tag{8}$$

Доказательство. Удовлетворяя (4) условию (5) при $a = 0$, получим

$$f(x) + \alpha f(x) + \beta f(0) = \varphi(x),$$

отсюда, учитывая, что $\alpha = \frac{\lambda}{1-\lambda} \neq -1$, получим

$$f(x) = \frac{1}{1+\alpha}[\varphi(x) - \beta f(0)] = \frac{1}{1+\alpha}\left[\varphi(x) - \frac{\beta}{1+\alpha+\beta}\varphi(0)\right].$$

Подставляя, полученное для $f(x)$ выражение в (4) получим (9).

Теорема 2.2. *Пусть $\lambda \neq 1$, $\mu \neq 1$, $a = 0$. Тогда задача 2 имеет единственное решение, которое представимо в виде*

$$u(x,y) = \frac{1}{1+\beta}[\varphi(y-x) + \alpha\varphi(-x) + \beta\varphi(y) - \alpha\varphi(0)]. \tag{9}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.2.

Хорошо известно, что однородная задача соответствующая задаче 1 для уравнения

$$u_x + u_y = 0$$

имеет бесчисленное множество решений

$$u(x,y) = g(x-y),$$

где $g(x)$ произвольная непрерывно дифференцируемая функция, такая что $g(0) = 0$.

Задача 3. *Найти регулярное решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее условию*

$$u(x,x) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{10}$$

Теорема 3.1. *Пусть λ и μ не обращаются в нуль одновременно, $\lambda \neq 1$, $\mu \neq 1$. Тогда любое регулярное решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее условию* (11) *представимо в виде*

$$u(x,y) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2}\left[\alpha\,\varphi(x-y) - \beta\,\varphi(y-x) + \alpha^2\,\varphi(x) - \right.$$

$$\left. - \alpha\,\beta\,\varphi(-x) + \alpha\,\beta\,\varphi(-y) - \beta^2\,\varphi(y)\right] - \frac{\varphi(0)}{\alpha+\beta}. \tag{11}$$

Доказательство. Удовлетворяя (4) условию (11), получим

$$f(0) + \alpha f(x) + \beta f(-x) = \varphi(x),$$

отсюда

$$\alpha\,f(x) + \beta\,f(-x) = \varphi(x) - c\,\varphi(0), \tag{12}$$

где $c = (1+\alpha+\beta)^{-1}$.

Заменив в (12) везде x на $-x$, для нахождения $f(x)$ получим следующую систему уравнений

$$\alpha\,f(x) + \beta\,f(-x) = \varphi(x) - c\,\varphi(0),$$

$$\beta\,f(x) + \alpha\,f(-x) = \varphi(-x) - c\,\varphi(0),$$

которая, очевидно, при $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ имеет единственное решение

$$f(x) = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2}[\alpha\,\varphi(x) - \beta\,\varphi(-x)] - \frac{\varphi(0)}{(1+\alpha+\beta)(\alpha+\beta)}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (4) получим формулу (12). Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $u(x,y)$, представимая формулой (12) удовлетворяет уравнению (1) и условию (11).

Пусть теперь носителем данных Коши является некоторый отрезок $[-c,d]$, где $c>0$ и $d>0$. Тогда из формул (9) и (10) видно, что областью определения решения задач 1-2 при $a=0$ является одна и та же область, а именно шестиугольник с вершинами в точках $(-c,0)$, $(0,c)$, (d,c), $(d,0)$, $(0,-d)$ и $(-c,-d)$ соответственно.

В случае задачи 3 областью определения будет служить шестиугольник с вершинами в точках $(-b,0)$, $(0,b)$, (b,b), $(b,0)$, $(0,-b)$ и $(-b,-b)$, где $b=\min\{c,d\}$

Список литературы/References

[1] Нахушев А. М., *Нагруженные уравнения и их применение*, Наука, М., 2012, 232 с., [Nakhushev A. M., Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie, Nauka, Moskva, 2012, 232 p. (in Russian)].

[2] Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И., *Нагруженные уравнения как возмущение дифференциальных уравнений*, Ғылым, Алматы, 2010, 336 с., [Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I., Nagruzhennye uravneniya kak vozmushchenie differentsial'nykh uravneniy, Fylym, Almaty, 2010, 336 p. (in Russian)].

[3] Ломов И.С., "Нагруженные дифференциальные операторы: сходимость спектральных разложений", *Дифференц. уравнения*, **19**:1 (1983), 86–94, [Lomov I.S., Nagruzhennye differentsial'nye operatory: skhodimost' spektral'nykh razlozheniy, Differents. uravneniya, 19:1 (1983), 86–94. (in Russian)].

[4] Нахушев А.М., "О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка", *Дифференц. уравнения*, **12**:1 (1976), 103–108, [Nakhushev A.M., O zadache Darbu dlya odnogo vyrozhdayushchegosya nagruzhennogo integro-differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka, Differents. uravneniya, 12:1 (1976), 103–108 (in Russian)].

[5] Дженалиев М.Т., "Краевые задачи для нагруженных параболического и гиперболического уравнений с производными по времени в граничных условиях", *Дифференц. уравнения*, **30**:4 (1994), 723–724, [Dzhenaliev M.T., Kraevye zadachi dlya nagruzhennykh parabolicheskogo i giperbolicheskogo uravneniy s proizvodnymi po vremeni v granichnykh usloviyakh, Differents. uravneniya, 30:4 (1994), 723–724 (in Russian)].

[6] Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И., "О разрешимости граничных задач для нагруженных уравнений", *Математический журнал*, **1**:1 (2001), 21–29, [Attaev A.Kh., Kharakteristicheskaya zadacha Koshi dlya lineynogo nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy Akademii nauk, 15:3 (2013), 9–12 (in Russian)].

[7] Аттаев А.Х., "Характеристическая задача Коши для линейного нагруженного гиперболического уравнения", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук*, **15**:3 (2013), 9–12, [Attaev A.Kh., Kharakteristicheskaya zadacha Koshi dlya lineynogo nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy Akademii nauk, 15:3 (2013), 9–12 (in Russian)].

[8] Аттаев А.Х., "Задача с данными на параллельных характеристиках для нагруженного волнового уравнения", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук*, **15**:2 (2013), 25–28, [Attaev A.Kh. Zadacha s dannymi na parallel'nykh kharakteristikakh dlya nagruzhennogo volnovogo uravneniya, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy Akademii nauk, 15:2 (2013), 25–28.].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.

[2] Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. Нагруженные уравнения как возмущение дифференциальных уравнений. Алматы: Ғылым, 2010. 336 с.

[3] Ломов И.С. Нагруженные дифференциальные операторы: сходимость спектральных разложений //Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. №1. С. 86–94

[4] Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. №1. С. 103–108

[5] Дженалиев М. Т. Краевые задачи для нагруженных параболического и гиперболического уравнений с производными по времени в граничных условиях // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. №4. С.723–724

[6] Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. О разрешимости граничных задач для нагруженных уравнений //Математический журнал. 2001. Т. 1. №1. С. 21–29

[7] Аттаев А. Х. Характеристическая задача Коши для линейного нагруженного гиперболического уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук. 2013. Т. 15. №3. С.9–12

[8] Аттаев А. Х. Задача с данными на параллельных характеристиках для нагруженного волнового уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии наук. 2013. Т. 15. №2. С.25–28

Для цитирования: Аттаев А. Х. О некоторых задачах для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2016. № 4-1(16). C. 9-14. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-9-14

For citation: Attaev A. Kh. On some problems for loaded partial differential equation of the first order, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2016, **16**: 4-1, 9-14. DOI: 10.18454/2079-6641-2016-16-4-1-9-14

Поступила в редакцию / Original article submitted: 30.11.2016