

УДК 517.9

УРАВНЕНИЕ РИККАТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ЭРЕДИТАРНОСТЬЮ*

Д. А. Твёрдый

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: diplomat95@mail.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение Риккати с дробной производной переменного порядка. Введение производной дробного переменного порядка в исходное уравнение определяет свойство среды – эффект памяти или эредитарность, который заключается в зависимости текущего состояния динамической системы от предыдущих ее состояний.

Ключевые слова: уравнение Риккати, дробная производная, эредитарность, численные методы, дифференциальное уравнение.

© Твёрдый Д. А., 2017

MSC 34A08

THE RICCATI EQUATION WITH VARIABLE HEREDITY

D. A. Tvyordyj

Vitus Bering Kamchatka State University, 683032, Petropavlovsk-Kamchatsky,
Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: diplomat95@mail.ru

We consider the Riccati differential equation with a fractional derivative of variable order. The introduction of a derivative of a fractional variable order into the initial equation determines the property of the medium - the memory effect or the heredity, which consists in the dependence of the current state of the dynamic system on its previous states.

Key words: Riccati equation, fractional derivative, hereditarity, numerical methods, differential equation.

© Tvyordyj D. A., 2017

*Работа выполнена по госзаданию, НИР "Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов" № АААА-А17-117031050058-9

Введение

Дифференциальные уравнения дробных порядков представляют большой интерес для исследования, так как часто находят свое применение во многих областях науки, таких как: математика, физика и др. [1], [2]. Уравнения с дробными производными принадлежат классу интегро-дифференциальных уравнений и называются по терминологии В. Вольтерра эредитарными [3]. Данное понятие означает наличие в изучаемом процессе эффекта памяти или нелокальности по времени. Нелокальность по времени, содержащаяся в ядре интегрального оператора исходного уравнения и будет называться функцией памяти. Если функция памяти является степенной, то мы естественным образом переходим к уравнениям с дробными производными, которые изучаются в рамках дробного исчисления [4].

В работе объектом нашего исследования будет уравнение Риккати [5] с учетом эредитарности. Эредитарность в уравнение Риккати характеризуется производной дробного переменного порядка. Отметим, что в работе [6] авторы исследовали эредитарное уравнение Риккати, когда порядок дробной производной является константой.

Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим следующее эредитарное уравнение [1]:

$$\int_0^t K(t-\tau)\dot{u}(\tau)d\tau + u^2(t) - 1 = 0, \quad (1)$$

где $K(t-\tau)$ – функция памяти, $t \in [0, T]$, $T > 0$ – время моделирования, $u(t)$ – функция решения. Уравнение (1) является аналогом классического уравнения Риккати [5] и оно учитывает эффект памяти.

Если функция памяти $K(t-\tau)$ является функцией Хевисайда, то мы можем говорить, что процесс обладает полной памятью, если это функция Дирака, то память отсутствует. Поэтому будем рассматривать функцию памяти в виде степенной функции:

$$K(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{(1-\alpha(t))}}{\Gamma(1-\alpha(t))}, 0 < \alpha(t) < 1, \quad (2)$$

где $\Gamma(1-\alpha(t))$ – гамма-функция (функция Эйлера).

Процессы с функцией памяти вида (2) называются процессами с частичной потерей памяти и требуют особого внимания в их изучении, т.к. многие естественные процессы имеют степенные законы распределения, в большинстве случаев которые, будут приводить к понятию фрактальности или фракталу [7].

Подставив функцию памяти (2) в эредитарное уравнение (1) мы получим следующее интегро-дифференциальное уравнение, называемое уравнением Риккати:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}} d\tau + u^2(t) - 1 = 0. \quad (3)$$

В уравнении (3) введем следующее обозначение:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}} d\tau, \quad (4)$$

которое является обобщением дробного оператора Капуто или Герасимова-Капуто.

Заметим, что существуют другие определения производной дробного переменного порядков [8], но остановимся на определении (4). Теперь уравнение (3) можно переписать в более компактной форме:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau) + u^2(t) - 1 = 0, \quad (5)$$

для которого справедливо начальное условие:

$$u(0) = \rho, \quad (6)$$

где $\rho - \text{const}$.

В следствии вышесказанного, постановка задачи для эредитарного уравнения Риккати в данном случае свелась к задаче Коши (5) и (6)

Следует заметить, что при $\alpha(t) - \text{const}$, мы придём к задаче Коши, рассмотренной в работе [6]. А если $\alpha(t) = 1$, то задача сведётся к классической задаче Коши для уравнения Риккати (5).

Так как задача Коши (5) и (6) в общем случае не имеет точного решения, то будем использовать численные методы для ее решения. Для этого разобьём временной отрезок $t \in [0, T]$ на N равных частей, где $k = \frac{T}{N}$ – шаг дискретизации, и получим что $t_i = ik, i = 0, \dots, N - 1$, а функция решения $u(t_i) = u_i$. Аппроксимацию дробной производной (4) проведем согласно работе [9] в виде:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau) = \sigma_{\alpha_i, k} \sum_{j=1}^i \omega_{j, \alpha_i} (u_{i-j+1} - u_{i-j}), i = 1, \dots, N - 1, \quad (7)$$

где $\sigma_{\alpha_i, k} = \frac{k^{-\alpha_i}}{\Gamma(2 - \alpha_i)}$, $\omega_{j, \alpha_i} = j^{1-\alpha_i} - (j-1)^{1-\alpha_i}$. Так же можно показать, что аппроксимация (7) имеет первый порядок.

Интегро-дифференциальную задачу Коши (5) и (6) можно переписать в разностной постановке:

$$\sigma_{\alpha_i, k} \sum_{j=1}^i \omega_{j, \alpha_i} (u_{i-j+1} - u_{i-j}) = 1 - u_i^2, u_0 = \rho. \quad (8)$$

В результате получим систему нелинейных алгебраических уравнений, численное решение, в зависимости от вида функции $\alpha(t)$, которой было реализовано в программе на языке программирования C++. Графики, приведённые в настоящей работе, были построены в системе компьютерной математики Maple.

Результаты моделирования их обсуждение

Рассмотрим следующие примеры численного решения задачи Коши (5) и (6) в зависимости от различных представлений функции $\alpha(t)$ и значений управляющих параметров.

Пример 1. Рассмотрим случай, изученный в работе [6], когда $\alpha(t) = \text{const}$. Значения управляющих параметров выберем следующими: $t \in [0, T], T = 3, N = 1000, k = 0.003, \rho = 0.2$. Построим на одном графике несколько расчетных кривых, соответствующих различным значениям $\alpha(t)$.

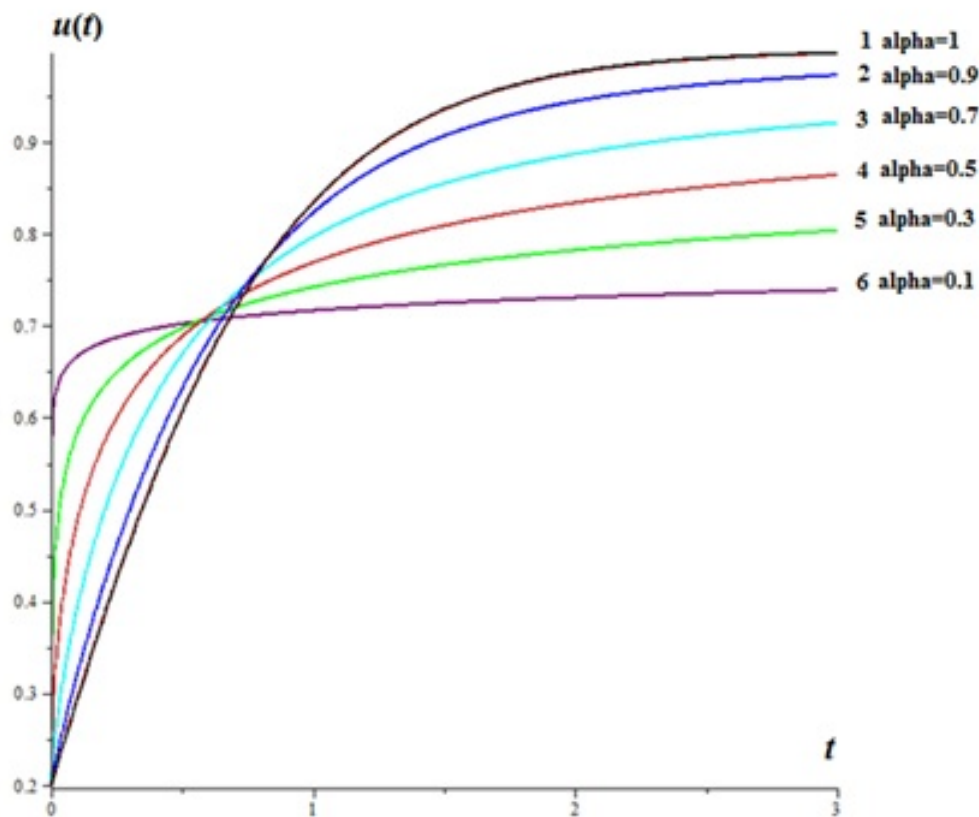


Рис. 1. Семейство расчетных кривых, соответствующих решению системы (8) при разных значениях параметра $\alpha(t)$.

На рис.1 показано семейство кривых, соответствующих решению задачи Коши (5) и (6) зависимости от значений дробного параметра: $\alpha(t) = 1$ (кривая 1 – будет представлять классическое решение уравнения Риккати), $\alpha(t) = 0.9$ (кривая 2), $\alpha(t) = 0.7$ (кривая 3), $\alpha(t) = 0.5$ (кривая 4), $\alpha(t) = 0.3$ (кривая 5), $\alpha(t) = 0.1$ (кривая 6).

Замечено, что наличие дробного параметра $\alpha(t)$, при уменьшении его значения, в исходном уравнение приводит к перестройке расчетных кривых численных решений задачи Коши (5) и (6). Это связано с тем, что наличие памяти в рассматриваемом процессе приводит к так называемым «тяжелым затягивающимся хвостам» в кривых распределении, полученных решений, например, кривая 5 из (1).

Если среда обладает эффектами памяти, то иногда такую среду называют фрактальной, а дробный параметр $\alpha(t)$ связан с ее характеристикой – фрактальной размерностью среды. Поэтому исследование данного параметра имеет важное значение для различных приложений, где изучаются свойства среды или материалов.

Теперь рассмотрим случаи, когда $\alpha(t)$ – это функция, в том числе и случайной.

ПРИМЕР 2. Пусть $\alpha(t) \in [0, 1]$ в соответствии с равномерным законом распределения. Значения управляющих параметров будут следующими: $t \in [0, T], T = 3, N = 1000, k = 0.01, \rho = 0.2$.

На рис.2 приведены результаты моделирования. Введение $\alpha(t)$ как случайной функции, изменение значений параметра представлено (рис.2а), приводит к случайной функции решения (рис.2б), что также отражено в хаотическом режиме на фазовой плоскости (рис.3с), построенной в координатах $(\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\tau), u(t))$.

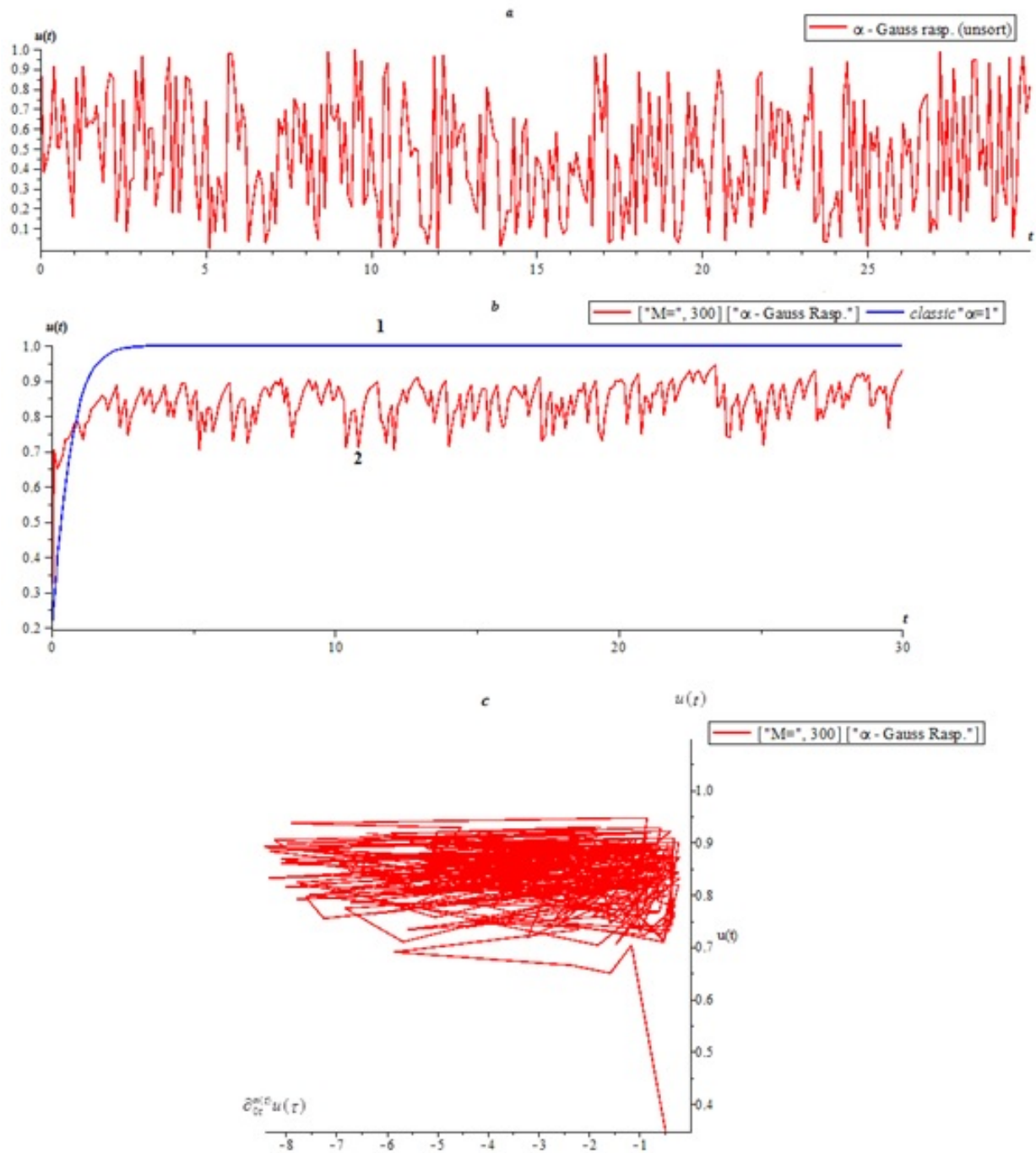


Рис. 2. Результаты моделирования для примера 2: а) поведение $\alpha(t)$; б) расчётные кривые: 1 – классическое решение $\alpha(t) = 1$; кривая численного решения системы (8); в) фазовая траектория.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим пример, когда $\alpha(t) = \frac{(1 - \delta - \theta) \cos(\mu t) + (\theta - \delta + \phi)}{2}$, а значения управляющих параметров будут следующими: $\delta = 0, \theta = 0.05, \mu = 9, \phi = 1, t \in [0, T], T = 30, N = 1000, k = 0.03, \rho = 0$.

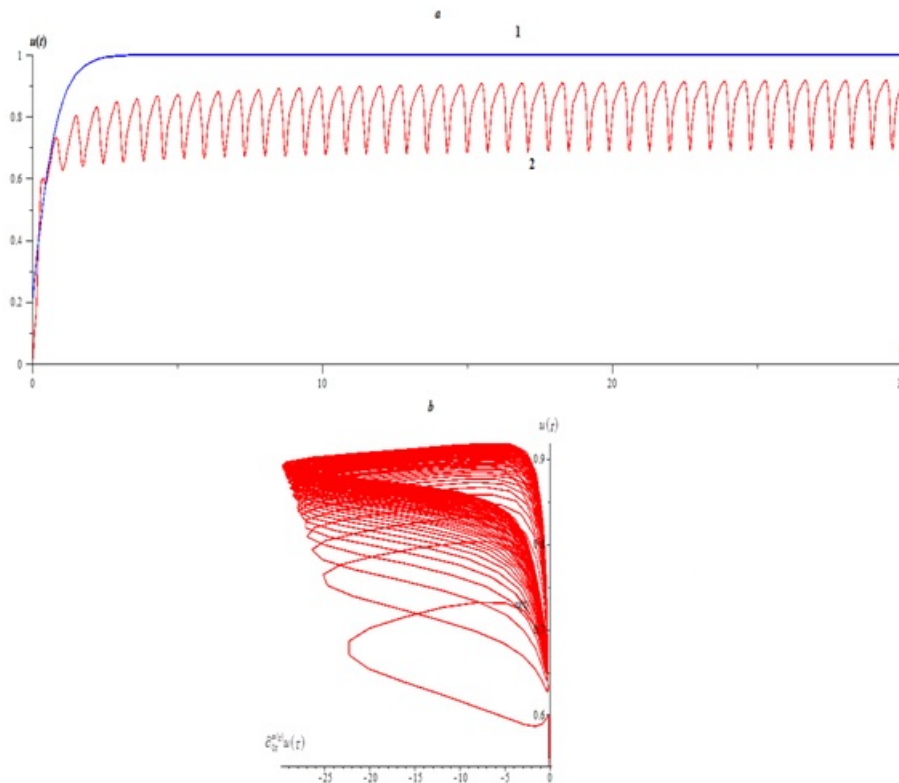


Рис. 3. Результаты моделирования для примера 3: а) расчетные кривые: 1 – классическое решение уравнение Риккати; 2 – решение системы (8); б) фазовая траектория.

Из результатов моделирования приведённых на рис.3, можно сделать вывод о том, что: если выбрать параметр $\alpha(t)$ в виде тригонометрической функции, то решение задачи Коши (5) и (6) будет описывать колебательный режим. Колебательный режим, приведенный на (рис.3а (кривая 2)) похож на один из колебательных режимов автогенератора Ван дер Поля, что имеет большой практический интерес при моделировании нелинейных осцилляторов. Из (рис.3а) видно, что колебания происходят сначала с возрастанием амплитуды, потом амплитуда устанавливается. Действительно этот факт хорошо виден на (рис.3б). Фазовая траектория выходит на предельный цикл, некоторую стабильную траекторию. Этот пример показывает, что с помощью эредитарного уравнения Риккати с переменным дробным порядком производной, можно моделировать различные колебательные режимы несмотря на то, что $0 < \alpha(t) < 1$.

Погрешность метода и расчётная точность

Рассмотрим изменение абсолютной ошибки ε и расчётный порядок точности $p = \frac{\ln(|\varepsilon|)}{\ln(\tau)}$ схемы (8), при изменении шага k . Для вычисления абсолютной ошибки ε , в примере 1 будем рассматривать разницу между точным и численным решением. В

примерах 2 и 3, будем использовать правило Рунге [10]:

$$\varepsilon = \max \left(\frac{|u_{2N}[2i-1] - u_N[i]|}{2^{p_{\text{prior}}-1}} \right), \quad (9)$$

где $i = 1 \dots N$. Априорную точность p_{prior} решения в данном методе положим равной 1. Это следует из общего порядка аппроксимации схемы, задаваемого в граничных узлах сетки, и равного 1, несмотря на то что аппроксимация задачи (5), (6) разностной схемой (8) будет давать второй порядок.

Таблица 1

Исследование численной схемы (8)

N	$k = T/M$	ε	p
Пример 1. $\alpha = 0.9999$ Время расчета $T = 3$			
65	0.04615	0.0080057826	1.569552780
131	0.02290	0.0040108135	1.461309925
263	0.01141	0.0020088245	1.388207803
527	0.005693	0.0010069838	1.335141320
1055	0.002844	0.0005117944	1.292511738
2111	0.001421	0.0002509894	1.264446995
N	$k = T/M$	ε	p
Пример 2			
65	0.3077	-	-
131	0.1527	0.177863110	0.9187311426
263	0.07605	0.1719669330	0.6832938221
527	0.03795	0.1879743500	0.5109173073
1055	0.01896	0.1659797310	0.4528711939
2111	0.00947	0.1538727525	0.4017074643
Пример 3			
65	0.3077	-	-
131	0.1527	0.157214319	0.9843999572
263	0.07605	0.093047735	0.9216824185
527	0.03795	0.047894435	0.9288660948
1055	0.01896	0.024516910	0.9351487980
2111	0.00947	0.01227877	0.9443462189

Из таблицы 1 следует, что абсолютная ошибка ε уменьшается при уменьшении шага k . В первом и третьем случае ошибка будет уменьшаться пропорционально уменьшения шага, однако во втором $\varepsilon \rightarrow 0$ медленно и неравномерно, как видно на (рис.4) видимо это как-то связано с случайностью распределения $\alpha(t)$.

Расчётный порядок точности p в первом случае ожидаемо стремится к 1. Однако во втором случае порядок точности резко падает при малых значениях N , и замедляется при больших. В третьем же случае, порядок точности при малых N так же падает, но не столь резко, однако при $N > 263$ вновь начинает расти (рис.5), и вероятно так же будет стремиться к 1. Такое поведение в примерах 2 и 3 возможно объясняется свойствами логарифма при вычислении p .

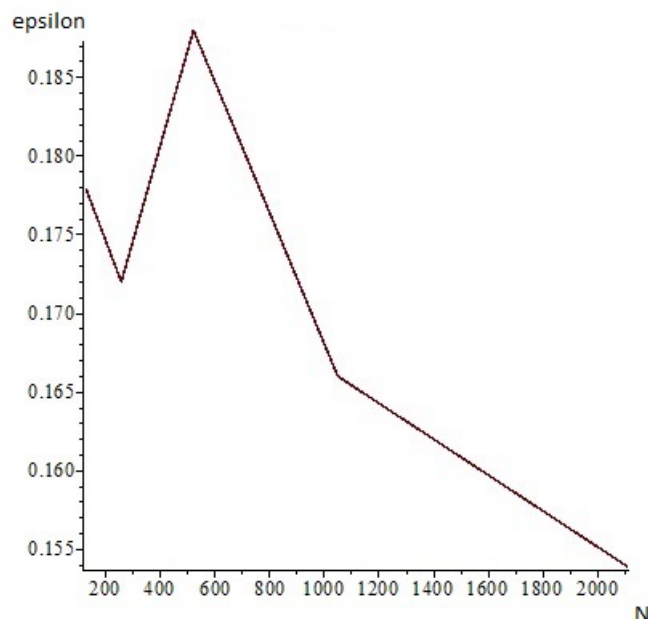


Рис. 4. Поведение ошибки в Примере 2, в зависимости от N

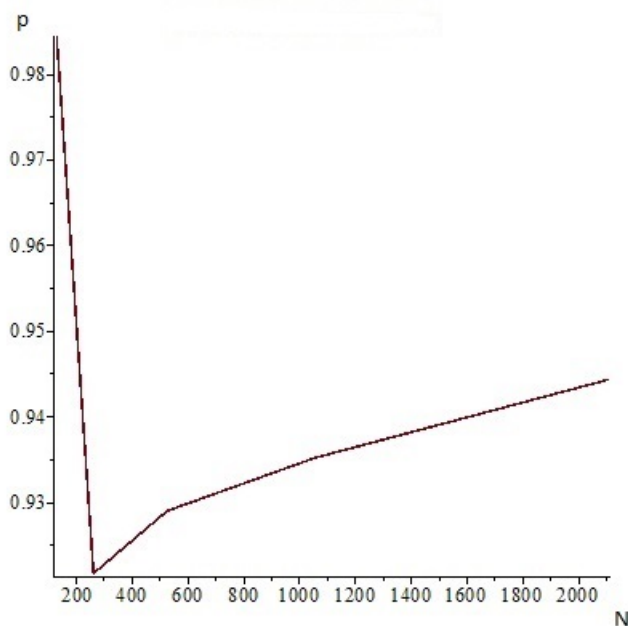


Рис. 5. Поведение ошибки в Примере 2, в зависимости от N

Заключение

Подводя итоги моделирования в настоящей работе, можно сделать следующие выводы. Введение дополнительного дробного параметра $\alpha(t)$ в уравнение Риккати, приводит к появлению новых кривых распределений, которые характеризуют решения задачи Коши (5) и (6), вследствие чего, можно моделировать колебательные режимы и строить модели различных сигналов, это несомненно заслуживает внимания для решения прикладных задач [12].

Результаты исследования абсолютной ошибки и расчётного порядка точности для примера 1, позволяют предположить что численная схема (8) применима к данной задаче.

Возможное продолжение исследования эредитарного уравнения Риккати связано с прикладными задачами, например в экономике [11], а также в решении обратной задачи оценки параметра $\alpha(t)$ по известным экспериментальным данным.

Выражаю благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н., Паровику Роману Ивановичу за ценные советы при планировании исследования и рекомендации по оформлению статьи.

Список литературы

- [1] Учайкин В. В., *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008, 512 с. [Uchajkin V. V. *Metod drobnih proizvodnyh*. Ul'janovsk: Artishok. 2008. 512].
- [2] Petras I., *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*, Springer Science & Business Media, 2011, 218 pp.
- [3] Volterra V., “Sur les 'equations int'egro-diff'erentielles et leurs applications”, *Acta Mathematica*, **35**:1 (1912), 295–356.
- [4] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, 2003, 272 с. [Nahushev A. M. *Drobnое ischislenie i ego primenenie*. Fizmatlit, 2003. 272].
- [5] Riccati J., “Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus”, *Actorum Eruditorum Supplementa*, **8** (1724), 66–73.
- [6] Sweilam N. H., Khader M. M., Mahdy A. M. S., “Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation”, *Applications and Applied Mathematics*, **7**:2 (2012), 595–608.
- [7] Федер Е., *Фракталы*, Мир, М., 1991, 254 с. [Feder E. *Fraktaly*. М.: Mir, 1991. 254].
- [8] Паровик Р. И., *Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов*, КамГУ имени Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 2015, 178 с. [Parovik R.I. *Matematicheskoe modelirovanie linejnyh jereditarnyh oscilljatorov*. Petropavlovsk-Kamchatskij: KamGU imeni Vitusa Beringa, 2015. 178].
- [9] Паровик Р. И., “Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2015, № 2 (11), 88–95. [Parovik R.I. Finite-difference schemes for fractal oscillator with a variable fractional order. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2015. vol. 11. no 2. С. 85-92].
- [10] Березин И. С., Жидков Н. П., *Методы вычислений*, Физматлит, М., 1962. [Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Metody vychislenij*. Moskva. Fizmatlit, 1962].
- [11] Makarov D. V., Parovik R. I., “Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus”, *Journal of Internet Banking and Commerce*, **21**:S6 (2016).
- [12] Твёрдый Д. А., “Уравнение Риккати с производной дробного переменного порядка”, *Международный студенческий научный вестник 2017*, № 2, 42-42. <https://www.eduherald.ru/ru/article/view?id=16889> (дата обращения: 22.04.2017). [Tvjordyj D.A. *Uravnenie Rikkati s proizvodnoj drobnogo peremennogo porjadka*. Mezhdunarodnyj studencheskij nauchnyj vestnik. 2017. № 2. p. 42-42].

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок. 2008. 512 с.
- [2] Petras I. Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation. Springer Science & Business Media, 2011. 218 p.
- [3] Volterra V. Sur les 'equations int'egro-diff'erentielles et leurs applications // Acta Mathematica. 1912. vol. 35. № 1. pp. 295–356.

- [4] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. Физматлит, 2003. 272 с.
- [5] Riccati J. Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus // Actorum Eruditorum Supplementa. 1724. vol. 8. № 1724. pp. 66–73.
- [6] Sweilam N.H., Khader M.M., Mahdy A.M.S. Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation // Applications and Applied Mathematics. 2012. vol. 7, № 2. С. 595–608.
- [7] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
- [8] Паровик Р.И. Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ имени Витуса Беринга, 2015. 178 с.
- [9] Паровик Р. И.. Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. № 2 (11). С. 88–95.
- [10] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. М.: Физматлит, 1962.
- [11] Makarov D. V., Parovik R. I. Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus // Journal of Internet Banking and Commerce. 2016. vol. 21, № S6. с. 1.
- [12] Твёрдый Д.А. Уравнение Риккати с производной дробного переменного порядка // Международный студенческий научный вестник. 2017. № 2. С. 42-42. url: <https://www.eduherald.ru/ru/article/view?id=16889> (дата обращения: 22.04.2017).

Для цитирования: Твёрдый Д. А. Уравнение Риккати с переменной эредитарностью // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2017. № 1(17). С. 44-53. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-17-1-44-53

For citation: Tvyordyj D. A. The Riccati equation with variable heredity, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2017, **17**: 1, 44-53. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-17-1-44-53

Поступила в редакцию / Original article submitted: 22.03.2017