

DOI: 10.18454/2079-6641-2017-17-1-33-43

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.938

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕРВНОГО
ИМПУЛЬСА С УЧЕТОМ ЭРЕДИТАРНОСТИ ***

О. Д. Липко

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: lipko__95@list.ru

В работе предложена математическая модель распространения нервного импульса ФитцХью-Нагумо, которая учитывает эффект эредитарности. Эта эредитарная модель описывается интегро-дифференциальным уравнением со степенным ядром – функцией памяти. Алгоритм численного решения этой модели, реализован в компьютерной программе в среде символьной математики Maple. С помощью этой программы были построены расчетные кривые - осциллограммы, а также фазовые траектории в зависимости от различных значений управляющих параметров.

Ключевые слова: эредитарность, модель ФитцХью-Нагумо, конечно-разностная схема.

© Липко О. Д., 2017

MATHEMATICAL MODELING

MSC 34A08

**MATHEMATICAL MODEL OF PROPAGATION OF NERVE IMPULSES WITH
REGARD HEREDITARY**

O. D. Lipko

Vitus Bering Kamchatka State University, 683032, Petropavlovsk-Kamchatsky,
Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: lipko__95@list.ru

A mathematical model of the propagation of the nervous pulse of FitzHugh-Nagumo is proposed, which takes into account the effect of heredity. This hereditary model is described by an integro-differential equation with a power kernel - a function of memory. The algorithm for the numerical solution of this model is implemented in a computer program in the environment of symbolic mathematics Maple. With the help of this program, calculated curves - oscillograms, and also phase trajectories were constructed depending on various values of control parameters.

Keywords: heredity Model FitzHugh-Nagumo, finite-difference scheme.

© Lipko O. D., 2017

*Работа выполнена по госзаданию, НИР "Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов" № АААА-А17-117031050058-9

Введение

Развитие теории эредитарных динамических систем началось с работы итальянского математика Вито Вольтерра [1], там же он ввел термин эредитарность для описания эффекта последствия, или памяти, и впервые исследовал эредитарный осциллятор. Математическое описание эредитарного осциллятора представляло собой интегро-дифференциальное уравнение с ядром, которое называется функцией памяти. В дальнейшем исследования эредитарных динамических систем были связаны с выбором функции памяти. В силу того что различные среды могут обладать фрактальными свойствами, то функцию памяти целесообразно выбрать степенной. Тогда интегро-дифференциальные уравнения можно переписать как дифференциальные уравнения дробных порядков, теория которых достаточно хорошо разработана [2]. В литературе такие уравнения называют фрактальными, они описывают процессы с частичной потерей памяти. Фрактальные динамические системы наиболее полно исследовались в монографиях [3, 4].

В работе обобщена динамическая система ФитцХью-Нагумо, которая была предложена Р. ФитцХью [5] и Дж. Нагумо [6] для описания распространения нервного импульса в мембране. Обобщенная математическая модель содержит уравнение с производными дробных порядков в смысле Герасимова-Капуто и решается с помощью конечно-разностной схемы. Основные результаты работы отражены в статье автора [7]. В настоящей работе также, с помощью компьютерных экспериментов, были исследованы вопросы устойчивости и сходимости конечно-разностной схемы, реализующей численное решение предложенной модели.

Постановка задачи и метод решения

Классическая нелинейная динамическая система ФитцХью-Нагумо (ФХН) согласно работам [5], [6] имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = c \cdot (y(t) - x(t) - \frac{x^3(t)}{3} + z), \\ \dot{y}(t) = -\frac{(x(t) - a + by(t))^3}{c}, \end{cases} \quad (1)$$

где a, b, c - константы, удовлетворяющие условиям $1 - 2b/3 < a < 1$, $0 < b < 1$, $b < c^2$, $x(t)$ - мембранный потенциал, z - интенсивность раздражителя, в первом приближении константа, которая также может иметь вид прямоугольного импульса или дельта-функции, $t \in [0, T]$ - время процесса, $T > 0$ - время моделирования.

Динамическая система (1) может быть записана в виде одного уравнения:

$$\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t)(x^2(t) + p) + qx^3(t) - a - bz = 0, \quad (2)$$

где $p = b/c^2 - 1$, $q = 1 - b$, $g = b/3$. Для уравнения (2) ставятся начальные условия $(\eta, \varphi - const)$:

$$x(0) = \eta, \dot{x}(0) = \varphi. \quad (3)$$

Задача (2), (3) является задачей Коши, решение которой исследуется в работе [5].

В настоящей работе мы рассмотрим обобщение задачи Коши (2) и (3), введем в него эредитарность с помощью следующего интегро-дифференциального уравнения:

$$\int_0^t K_1(t-\tau)\ddot{x}(\tau)d\tau - c(x^2(t)+p) \int_0^t K_2(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau + qx(t) + gx^3(t) - a - bz = 0, \quad (4)$$

где $K_1(t-\tau)$ и $K_2(t-\tau)$ - функции памяти, характеризующие эредитарность.

Замечание. Заметим, что если функции памяти представляют собой дельта-функцию, то тогда в системе отсутствует эредитарность, а если функции памяти представляют собой функции Хэвисайда, то тогда система обладает полной памятью.

Интерес представляет третий вариант: если функции памяти являются степенными функциями, например,

$$K_1(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad K_2(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}, \quad 1 < \alpha < 2, 0 < \beta < 1, \quad (5)$$

где $\Gamma(t)$ - гамма-функция Эйлера, тогда говорят, что система обладает частичной "потерей памяти"[2].

В дальнейшем будем исследовать эредитарные процессы с частичной "потерей памяти". Подставим функции памяти (5) в интегро-дифференциальное уравнение (4). В результате получим:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}} - \frac{c(x^2(t)+p)}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\beta} + qx(t) + gx^3(t) - a - bz = 0. \quad (6)$$

Мы получили интегро-дифференциальное уравнение специального вида. Функции памяти (5) в интегро-дифференциальном уравнении (6) могут быть отличны от степенных функций, что приводит к другим интегро-дифференциальным уравнениям. Если обратиться к определению производной дробного порядка по Герасимова-Капуто, то мы приходим к уравнению:

$$\partial_{0t}^\alpha x(\tau) - c(x^2(t)+p)\partial_{0t}^\beta x(\tau) + qx(t) + gx^3(t) - a - bz = 0, \quad (7)$$

где дробные дифференциальные операторы равны:

$$\partial_{0t}^\alpha x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}, \quad \partial_{0t}^\beta x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\beta},$$

определенные в смысле Герасимова-Капуто с дробными порядками $1 < \alpha < 2, 0 < \beta < 1$.

Можно отметить, что в предельном случае уравнение (7) переходит в классическое уравнение ФХН (2), поэтому можно считать, что уравнение (2) является частным случаем уравнения (7). Отметим, что уравнение (7) содержит кубическую нелинейность, характерную для осциллятора Дуффинга [8], а также Ван дер Поля [9].

Интегро-дифференциальное уравнение ФХН (7) будем называть дробным, или фрактальным уравнением, а процесс, которые оно описывает, будем называть фрактальным, или эредитарным.

Задача Коши (7) и (3) в общем виде не имеет точного решения в силу того, что модельное уравнение является нелинейным, поэтому надо использовать численные методы для ее решения. В качестве численного метода возьмем метод конечно-разностных схем, так как его легко можно реализовать в любой компьютерной среде.

Будем рассматривать равномерную сетку. Для этого разобьем временной интервал $[0, T]$ на N равных частей. В результате получим равномерную сетку $t_j = j\tau$, где шаг $\tau = T/N$, $j = 0, \dots, N-1$. Значения искомой функции $x(t_j) = x_j$, будем называть ее сеточной функцией. Аппроксимация дробных операторов уравнения (7) осуществляется следующим образом [3, 10]:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha} x(\tau) &\approx \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} a_j \cdot (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}), \quad a_j = (j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}, \\ \partial_{0t}^{\beta} x(\tau) &\approx \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} b_j \cdot (x_{k-j+1} - x_{k-j}), \quad b_j = (j+1)^{1-\beta} - j^{1-\beta}. \end{aligned}$$

Подставим эти аппроксимации в модельное уравнение (7). Приходим к следующей конечно-разностной схеме:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \varphi + \tau\eta, \quad k = 0, \\ x_2 = \frac{1}{A + Bc(x_1^2 + p)} ((2A + Bc(x_1^2 + p) - q) \cdot x_1 - x_1^3 g - Ax_0 + a + bz), \quad k = 1, \\ x_{k+1} = \frac{1}{A + Bc(x_k^2 + p)} ((2A + Bc(x_k^2 + p) - q) \cdot x_k - x_k^3 g - Ax_{k-1} + a + bz - \\ - Bc(x_k^2 + p) \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (b_j(x_{k+1} - x_k)) - A \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (a_j(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}))), \\ A = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}, \quad B = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}, \quad k = 2, \dots, n-1. \end{array} \right. \quad (8)$$

Замечание. Заметим, что, как правило, нелинейные динамические системы обладают жесткостью при больших значениях управляющих параметров, что приводит к необходимости уменьшить шаг дискретизации в конечно-разностной схеме. В нашем случае, в силу ограниченности параметров a, b, c , жесткость отсутствует, поэтому в уменьшении шага нет необходимости.

Результаты моделирования и их обсуждение

Конечно-разностная схема (8) была реализована в компьютерной программе, в среде символьной математики Maple. Рассмотрим применение конечно-разностной схемы (8) численного решения задачи Коши (2) и (3). Значения параметров a, b, c были взяты из работы [5]. Сначала рассмотрим случай, когда изменяются значения дробных параметров α и β , а потом и значения параметра z . Также мы будем исследовать конечно-разностную схему (8) с помощью метода двойного пересчета на ее сходимость и покажем устойчивость по начальным данным и правой части.

Пример 1. Значения управляющих параметров в задаче Коши (2) и (3): $t \in [0, T], T = 100, N = 2000, \tau = 0.05, a = 0.7, b = 0.8, z = -0.4, c = 3, x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.1$ Результаты моделирования приведены на рис.1.

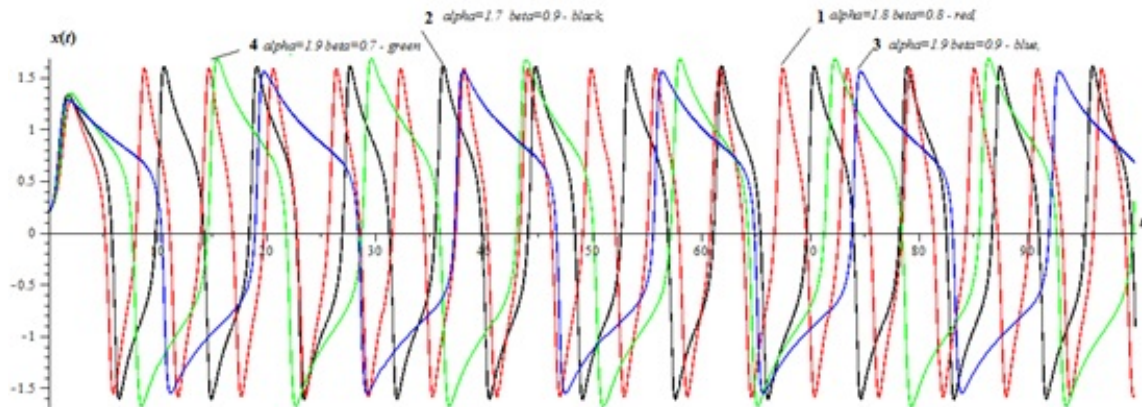


Рис. 1. Осциллограммы, полученные по конечно-разностной схеме (8) при значениях параметров α и β : кривая 1 - $\alpha = 1.8, \beta = 0.8$, кривая 2 - $\alpha = 1.7, \beta = 0.9$, кривая 3 - $\alpha = 1.9, \beta = 0.9$, кривая 4 - $\alpha = 1.9, \beta = 0.7$

На рис. 1 приведены осциллограммы, полученные по схеме (8) при различных значениях α и β . Осциллограмма под номером 3 по форме похожа на осциллограмму из работы [5]. При уменьшении значений α и β , изменяется форма осциллограмм (смещение периодичности колебаний), однако амплитуда колебаний остается неизменной, что на фазовой плоскости соответствуют предельным циклам (рис.2).

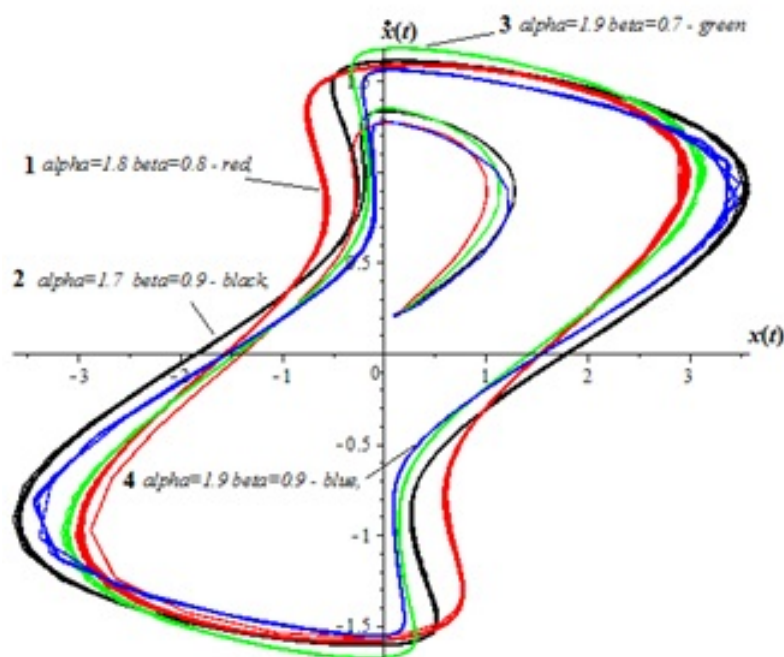


Рис. 2. Фазовые траектории

Исследуем конечно-разностную схему (8) на сходимость с помощью метода двойного пересчета (правила Рунге) при различных значениях параметров α и β . В силу того, аппроксимация уравнения (7) имеет первый порядок, то для вычисления абсолютной ошибки ε мы можем воспользоваться следующей формулой:

$$\varepsilon = \max(|x_i - x_{2i}|), i = 1, \dots, N,$$

где x_i – численное решение, полученное по схеме (8) на шаге τ , x_{2i} – численное решение, полученное по схеме (8) на шаге $\tau/2$.

Для оценки расчетной точности можем использовать соотношение:

$$p = \ln(|\varepsilon|) / \ln(\tau/2).$$

Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

Исследование схемы (8) при различных значениях α и β			
$\alpha = 1,8$ и $\beta = 0,8$			
N	τ	Абсолютная ошибка	Порядок точности p
10	1/10	0.0456	1.0307
20	1/20	0.0262	0.9868
40	1/40	0.0141	0.9724
80	1/80	0.0073	0.9688
160	1/160	0.0037	0.9691
320	1/320	0.0019	0.9707
$\alpha = 1,7$ и $\beta = 0,9$			
N	τ	Абсолютная ошибка	Порядок точности p
10	1/10	0.0591	0.9443
20	1/20	0.0324	0.9301
40	1/40	0.0171	0.9286
80	1/80	0.0088	0.9319
160	1/160	0.0045	0.9364
320	1/320	0.0023	0.9397
$\alpha = 1,9$ и $\beta = 0,9$			
N	τ	Абсолютная ошибка	Порядок точности p
10	1/10	0.0436	1.0457
20	1/20	0.0249	1.0003
40	1/40	0.0134	0.9847
80	1/80	0.0069	0.9799
160	1/160	0.0035	0.9790
320	1/320	0.0018	0.9805
$\alpha = 1,9$ и $\beta = 0,7$			
N	τ	Абсолютная ошибка	Порядок точности p
10	1/10	0.0346	1.1221
20	1/20	0.0202	1.0575
40	1/40	0.0108	1.0313
80	1/80	0.0056	1.0196
160	1/160	0.0028	1.0138
320	1/320	0.0014	1.0119

Из табл.1 можно сделать вывод о том, что при уменьшении шага τ , абсолютная ошибка ε уменьшается, а расчетный порядок точности близок к единицы. Такая экспериментальная сходимость не гарантирует сходимости к истинной функции решения задачи Коши (2) и (3). Поэтому необходимо доказывать теорему сходимости.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим другой случай: зафиксируем значения α и β , и будем изменять значения z при значениях параметров: $t \in [0, T], T = 100, N = 2000, \tau = 0.05, a = 0.7, b = 0.8, z = -0.4, c = 3, x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.1, \alpha = 1.8, \beta = 0.8$ и различных значениях z . На (рис. 3) приведены осциллограммы для этого случая.

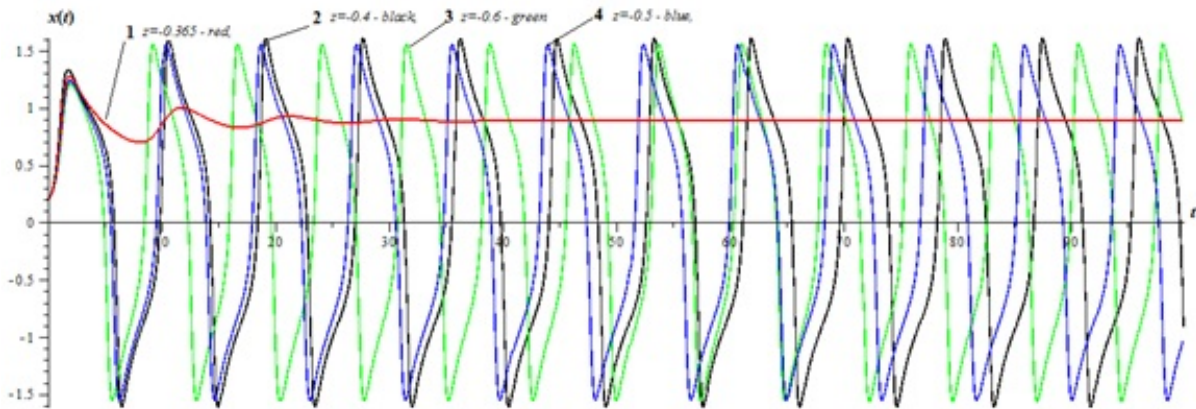


Рис. 3. Осциллограммы, полученные по конечно-разностной схеме (8): кривая 1 - $z = -0.365$, кривая 2 - $z = -0.4$, кривая 3 - $z = -0.6$, кривая 4 - $z = -0.5$

В случае $z = -0.365$ (кривая 1) мы видим, что колебания затухают, а фазовая траектория (рис. 4) имеет вид закручивающейся спирали. При уменьшении значений параметра z , происходит смещение осциллограмм, но с постоянной амплитудой, что обеспечивает выход фазовых траекторий на предельный цикл (рис. 4).

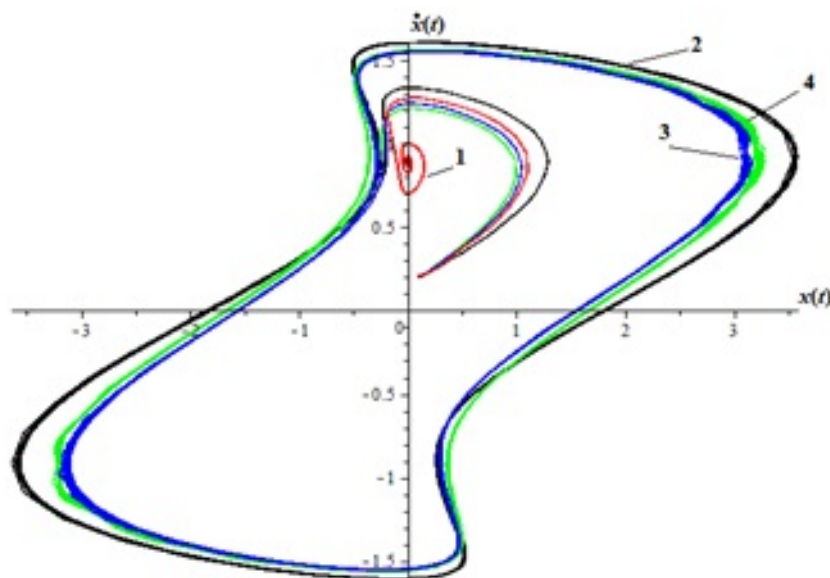


Рис. 4. Фазовые траектории: кривая 1 - $z = -0.365$, кривая 2 - $z = -0.4$, кривая 3 - $z = -0.6$, кривая 4 - $z = -0.5$

Проведем исследования сходимости конечно-разностной схемы (8) в зависимости от значения параметра z . Для этого воспользуемся методикой из предыдущего примера. Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Исследование схемы (8) при различных значениях z

$z = -0,365$			
N	τ	Абсолютная ошибка	Порядок точности
10	1/10	0.0482	1.0117
20	1/20	0.0278	0.9710
40	1/40	0.0149	0.9588
80	1/80	0.0077	0.9570
160	1/160	0.0039	0.9587
320	1/320	0.0020	0.9615
$z = -0,4$			
N	τ	Абсолютная ошибка	Порядок точности
10	1/10	0.0456	1.0307
20	1/20	0.0262	0.9868
40	1/40	0.0141	0.9724
80	1/80	0.0073	0.9688
160	1/160	0.0037	0.9691
320	1/320	0.0019	0.9707
$z = -0,5$			
N	τ	Абсолютная ошибка	Порядок точности
10	1/10	0.03775	1.0938
20	1/20	0.02163	1.0391
40	1/40	0.0116	1.0170
80	1/80	0.0060	1.0074
160	1/160	0.0030	1.0031
320	1/320	0.0015	1.0009
$z = -0,6$			
N	τ	Абсолютная ошибка	Порядок точности
10	1/10	0.0295	1.1759
20	1/20	0.0168	1.1067
40	1/40	0.0090	1.0742
80	1/80	0.0046	1.0567
160	1/160	0.0023	1.0462
320	1/320	0.0012	1.0393

Аналогично, как и в предыдущем примере, мы видим, что при уменьшении шага τ абсолютная ошибка уменьшается ϵ , а расчетный порядок точности стремиться к единице.

Рассмотрим на примере устойчивость конечно-разностной схемы по начальным данным и правой части при следующих значениях управляющих параметров: $T = 1, N = 683, c = 3, a_0 = 0.7, z = -0.4, b_0 = 0.8, \alpha = 1.8, \beta = 0.8, x(0) = \dot{x}(0) = 0.2$. Для этого сначала добавим малую величину $\epsilon = 10^{-5}$ в начальное условие $x(0)$, а потом в правую часть уравнения (7). Устойчивость по начальным данным или по правой части будет определяться малым изменением решения задачи Коши (2) и (3) на порядок величины ϵ . В противном случае, решение задачи Коши (2) и (3) будет неустойчивым. Результаты исследования приведены в табл. 3.

Таблица 3

Устойчивость по начальным данным и правой части для схемы (8)

$x(0) + \varepsilon$			
τ	ε_0	ε	δ
1/500	0.0000100193	0.0000100000	0.0000000193
1/530	0.0000100380	0.0000100000	0.0000000380
1/600	0.0000100543	0.0000100000	0.0000000543
1/685	0.0000100608	0.0000100000	0.0000000608
1/720	0.0000101316	0.0000100000	0.0000001316
$f + \varepsilon$			
τ	ε_0	ε	δ
1/500	0.0000144736	0.0000100000	0.0000044736
1/530	0.0000128115	0.0000100000	0.0000028115
1/600	0.0000122548	0.0000100000	0.0000022548
1/685	0.0000102220	0.0000100000	0.0000002220
1/720	0.0000101831	0.0000100000	0.0000001831

Из табл. 3 мы видим, что для этого примера, имеет место устойчивость по начальным данным и правой части, так как разность δ между возмущенным и невозмущенным решениями имеет порядок величины ε . Конечно, для наиболее полной картины, необходимо доказать теорему об устойчивости конечно-разностной схемы (8). Однако мы в работе показали, что явную-конечно разностную схему можно применять (8) для решения задачи Коши (2) и (3).

Заключение

В работе был предложен и исследован эрдитарный нелинейный осциллятор ФитцХью-Нагумо. С помощью теории конечно-разностных схем получено численное решение задачи Коши, построены осциллограммы и фазовые траектории. Показано, что параметры α и β приводят к смещению колебаний осциллятора, но при этом сохраняется постоянство амплитуды, а также изменяется форма фазовых траекторий, которые выходят на предельный цикл. При изменении параметра z колебания могут быть затухающими, а фазовая траектория для соответствующей точки покоя будет являться устойчивым фокусом.

Введение дополнительных управляющих параметров α и β , чтобы более гибко моделировать колебательный режим, дает дополнительную параметризацию сигнала. Дальнейший интерес в исследовании эрдитарного осциллятора ФитцХью-Нагумо может заключаться в исследовании на устойчивость точек покоя по аналогии с работой [9], а также дальнейшее обобщение, связанное с введением функций и [11]. Другое направление исследований связано с качественными свойствами конечно-разностной схемы (8) - устойчивостью и сходимостью [10].

Автор выражает благодарность научному руководителю, к.ф.-м.н., Р.И. Паровику за ценные советы и замечания по содержанию данной научной статьи.

Список литературы

- [1] Volterra V., “Sur les 'equations int'egro-diff'erentielles et leurs applications”, *Acta Mathematica*, **35**:1 (1912), 295–356.
- [2] Учайкин В. В., *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008, 512 с. [Uchajkin V. V., *Metod drobnih proizvodnyh*, Artishok, Ul'janovsk, 2008, 512].
- [3] Паровик Р. И., *Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов*, КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 2015, 178 с. [Parovik R. I., *Matematischeskoe modelirovanie linejnyh jereditarnyh oscilljatorov*, KamGU im. Vitusa Beringa, Petropavlovsk-Kamchatskij, 2015, 178].
- [4] Petras I., *Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation*, Springer, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, 218 с.
- [5] FitzHugh R., “Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane”, *Biophysical Journal*, **1** (1961), 446–446.
- [6] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S., “An active pulse transmission line simulating nerve axon”, *Proc. IRE*, **50** (1962), 2061–2070.
- [7] Липко О. Д., “Эредитарное модельное уравнение ФитцХью-Нагумо”, *Международный студенческий научный вестник*, 2017, №2, 43-43. [Lipko O. D., “Jereditarnoe model'noe uravnenie FitcH'ju-Nagumo”, *Mezhdunarodnyj studencheskij nauchnyj vestnik*, 2017, №2, 43-43 <https://www.eduherald.ru/ru/article/view?id=16890> (дата обращения: 22.04.2017)].
- [8] Паровик Р. И., “Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2015, №1(10), 18–24. [Parovik R.I. *Mathematical modeling of nonlocal oscillatory Duffing system with fractal friction*. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2015. vol. 10. no 1. С. 16-21.].
- [9] Паровик Р. И., “Об исследовании устойчивости эредитарного осциллятора Ван дер Поля”, *Фундаментальные исследования*, 2016, №3(2), 283–287. [Parovik R. I., “Ob issledovanii ustojchivosti jereditarnogo oscilljatora Van der Polja”, *Fundamental'nye issledovaniya*, 2016, №3(2), 283–287].
- [10] Parovik R. I., “Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable order fractional derivatives”, *Archives of Control Sciences*, **26**:3 (2016), 429–435.
- [11] Паровик Р. И., “Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2015, №2(11), 88–85. [Parovik R.I. *Finite-difference schemes for fractal oscillator with a variable fractional order*. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2015. vol. 11. no 2. С. 85-92].

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Volterra V. Sur les 'equations int'egro-diff'erentielles et leurs applications // *Acta Mathematica*. 1912. vol. 35. issue 1. pp. 295–356.
- [2] Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
- [3] Паровик Р. И. Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский. КамГУ им. Витуса Беринга. 2015. 178 с.
- [4] Petras I. *Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation*. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Springer, 2011. 218 p.
- [5] FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // *Biophysical Journal*. 1961. vol. 1. pp. 446–446.
- [6] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*. 1962. vol. 50. pp. 2061–2070.

- [7] Липко О. Д. Эредитарное модельное уравнение ФитцХью-Нагумо // Международный студенческий научный вестник. 2017. № 2. С. 43-43. url: <https://www.eduherald.ru/ru/article/view?id=16890> (дата обращения: 22.04.2017)
- [8] Паровик Р. И. Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. №1(10). С.18–24.
- [9] Паровик Р. И. Об исследовании устойчивости эредитарного осциллятора Ван дер Поля // Фундаментальные исследования. 2016. № 3(2). С. 283–287.
- [10] Parovik R. I. Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable order fractional derivatives. Archives of Control Sciences. 2016. vol. 26. issue 3. pp. 429–435.
- [11] Паровик Р. И. Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. №2(11). С. 88–85.

Для цитирования: Липко О. Д. Математическая модель распространения нервного импульса с учетом эредитарности // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2017. № 1(17). С. 33-43. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-17-1-33-43

For citation: Lipko O. D. Mathematical model of propagation of nerve impulses with regard hereditary, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2017, **17**: 1, 33-43. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-17-1-33-43

Поступила в редакцию / Original article submitted: 22.03.2017