Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. № 2(18). C. 81-88. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-81-88

УДК 512.24

ПРОГРАММНЫЙ ГЕНЕРАТОР ПРОЦЕССОВ ПОРОЖДАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Е. А. Казаков

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: MifistJohn@gmail.com

В статье рассмотрены нелинейные динамические системы с импульсным возмущением. Описаны способы генерации импульсных случайных процессов на ЭВМ. На примере системы Лоренца рассмотрена работа программного модуля.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, импульсные случайные процессы, численные методы

MSC 70K05

PROGRAM GENERATOR PROCESSES INDUCED BY NONLINEAR DYNAMIC SYSTEM WITH IMPULS NOISES

E. A. Kazakov

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: MifistJohn@gmail.com

The article considers nonlinear dynamic systems with impulse perturbation. The described method of generation of impulse random processes on a computer. On the example of the Lorenz system are considered a software module.

Key words: nonlinear dynamical system, impulsive random processes, numerical methods

Введение

Базовой математической моделью любой системы эволюционирующей во времени является динамическая система. Все реальные системы являются в той или иной степени нелинейными. При моделировании дифференцируемая нелинейность произвольного вида может быть представлена тэйлоровским разложением и, если при этом ограничиться квадратичными членами, получится предельное усечение сохраняющее нелинейный эффект. Поэтому квадратично нелинейная динамическая система может рассматриваться как одна из базовых моделей нелинейной динамики. И многие принципиальные свойства нелинейных систем были обнаружены изначально именно для квадратичных систем [1, 2].

Эти системы возникают например в задачах химической кинетики, взаимодействий популяций, при моделировании социальных конфликтов, в задачах чистой и магнитной гидродинамики и т.п. Известно что во многих системах данного класса может возникать режим детерминированного хаоса. Этот хаос является внутренним свойством самих таких систем. С другой стороны, систему можно возмущать импульсными шумами, имитирующими флуктуации окружающей среды. Под окружающей средой мы понимаем любые объекты и процессы, внешние по отношению к изучаемой системе. Может получится так, что внешние шумы скомпенсируют детерминированный хаос, то есть шум будет играть конструктивную роль стабилизатора динамики. В частности, шум может как инициировать, так и блокировать переброси в системах между различными устойчивыми состояниями [3]. Аналитически исследование подобных процессов чрезвычайно сложно, поэтому основная роль отводится численному эксперименту.

В настоящей работе описывается разработанный программный модуль численного моделирования динамики квадратичных систем, возмущаемых определенным классом импульсных процессов.

Динамическая система

Вообще, под динамической системой будем понимать объект или процесс, для которых однозначно определенно понятие состояния, как совокупность значений некоторых величин в заданный момент времени и задан оператор, определяющий эволюцию начального состояния во времени. [4]. Если нас интересует состояние динамической системы в любой момент времени на заданном интервале, то говорят о системах с непрерывным временем и для описания их эволюции чаще всего используют дифференциальные уравнения. Если же для описания поведения системы достаточно знать ее состояние в конечном или счетном числе моментов времени, то говорят о системах с дискретном временем и для её описания используют дискретное отображение, например, разностные уравнения.

Мы будем рассматривать системы с непрерывным временем, представляемые в виде:

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{i,j=0}^{N-1} A_{kij} x_i x_j + \sum_{i=0}^{N-1} B_{ki} x_i + \sum_{i,j=0}^{N-1,M-1} D_{kij} x_i \xi_j + E_k, k = 0, \ldots, N-1, \tag{1}$$

где $x_k = x_k(t)$ – фазовые переменные, $\xi_j = \xi_j(t)$ – случайные процессы (шумы), а A_{kij}, B_{ki}, D_{kij}, E_k – постоянные коэффициенты. Натуральные числа N и M определяют размерность системы и размерность вектора шумов, соответственно.

Видно, что шумы действуют на систему мультипликативно (члены с коэффициентами D_{kij}).

Распределение шумов

Шумовые возмущения ξ_j в системе (1) представляют собой последовательность импульсов экспоненциальной формы, возникающих в случайные моменты времени и имеющих случайные амплитуды. Более точно, процессы ξ_j предполагаются независимыми между собой и каждый из них формируется по следующей схеме.

Пусть $\{\theta_{js}\}$ – возрастающая последовательность случайных точек на оси времени. Промежутки времени $\tau_{js} = \theta_{js} - \theta_{j,s-1}$ независимы и одинаково распределены с плотностью вероятности $f_j(t)$. Для различных j эта плотность может быть различной. Таким образом, $\{\theta_{js}\}$ образует стационарный поток событий.

В описываемом модуле моделирования предусмотрена возможность выбора для каждого j одного из двух типов распределений величин τ_{js}. Первый тип – это показательное распределение с плотностью $f_j(t) = \dfrac{1}{\mu_j}\exp\{-t/\mu_j\}, t \geq 0$, второй тип – распределение вида $f_j(t) = \dfrac{\mu_j - 1}{(1+t)^{\mu_j}}$, имеющее степенную асимптотику. Здесь μ_j – числовой коэффициент.

В первом случае поток событий будет пуассоновским, во втором – потоком Пальма [5].

Введем функцию

$$G(t) = \; = \begin{cases} \exp\{-\lambda_j t\}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где $\lambda_j > 0$ – параметр, и определим процесс $\xi_j(t)$ выражением:

$$\xi_j(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \eta_{js} G(t - \theta_{js}),$$

где η_{js} – нормальные центрированные случайные величины с дисперсией σ_j^2, независимые между собой и с величинами τ_{js}.

Итак, процесс $\xi_j(t)$ представляет собой сумму нарастающего числа экспоненциальных импульсов, возникающих в случайные моменты времени и имеющих случайные амплитуды. Дисперсия σ_j^2 определяет среднюю энергию импульсов. Величины τ_{js} имеют смысл времени ожидания очередного импульса, а параметр μ_j может быть любым положительным числом в случае показательного распределения времени ожидания, и любым числом, большим единицы, в случае степенного распределения.

Непосредственное моделирование случайных величин τ_{js} и η_{js} в программе проводилось стандартными преобразованиями последовательностей псевдослучайных чисел [6]. Сами эти псевдослучайные последовательности формировались методом nextDouble() класса Random языка Java.

Программный модуль

Разработанный для проведения вычислительных экспериментов с системами типа (1) программный модуль предназначен, прежде всего, для исследования процессов инверсий – перехода между устойчивыми состояниями, отличающимися знаками всех или некоторых фазовых переменных. Поэтому результатом работы являются текстовый файл численных решений системы и файл гистограмм инверсий каждой фазовой переменной x_k.

Отметим, что модуль позволяет моделировать и динамику без случайных возмущений. Для этого достаточно положить все $D_{kij} = 0$. Размерность вектора шумов в этом случае может быть произвольной, но чем она больше, тем больше времени будет тратиться на генерацию шумовых компонент. Используемые в программе структуры данных требуют, чтобы вектор шумовых процессов был бы по крайней мере одномерным. В связи с этим, для работы с детерминированными системами следует полагать $M = 1$.

Исходными данными для программы являются коэффициенты системы (1), тип и параметры законов распределения величин τ_{js} и η_{js}, шаг и отрезок численного интегрирования системы, начальные условия, а также метод решения – явная схема Рунге-Кутты 4-го порядка или неявная схема Эйлера.

Общая блок-схема модуля приведена на рис. 1. По начальным данным программа ищет решение системы заданным методом и формирует два файла: первый файл содержит решения системы с заданным шагом и сгенерированные шумовые процессы(фазовые переменные); во втором файле содержится гистограмма инверсий по каждой фазовой переменной.

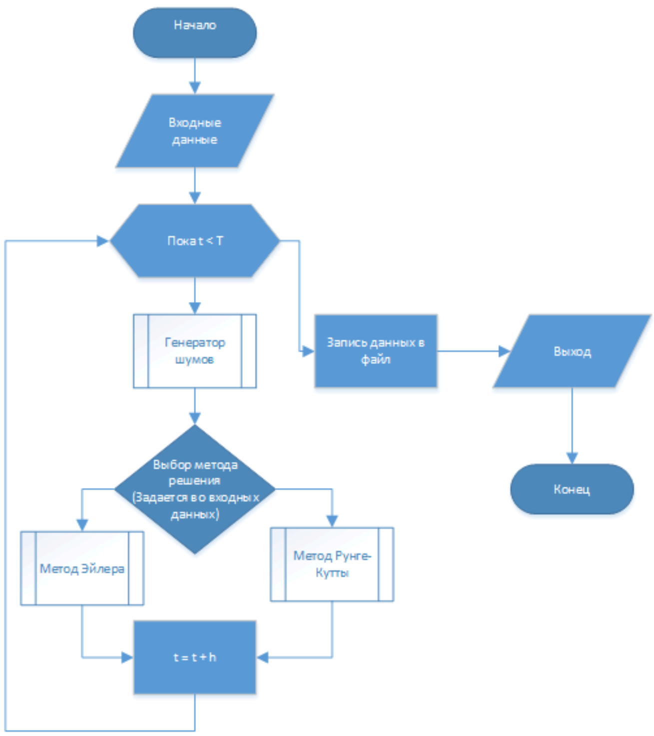

Рис. 1. Общая блок схема программного модуля

Численное моделирование

Рассмотрим работу программы сначала на классическом примере систем типа (1) – системе Лоренца, без шумового воздействия. Система Лоренца имеет вид [1]:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \sigma(x_2 - x_1), \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_1(r - x_3) - x_2, \\
\frac{dx_3}{dt} &= x_1x_2 - bx_3,
\end{aligned} \tag{2}$$

и, как легко, понять относится к системам рассматриваемого типа.

Параметрами системы возьмем следующие значения: $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 2.66$

Передаем данные на вход программного модуля, в результаты получаем решение системы. На рис. 2 построен полученный фазовый портрет, представляющий собой известный аттрактор Лоренца. На рис. 3, 4 показаны гистограммы инверсии по переменным x_1 и x_2. Перебросов по переменной x_3 нет.

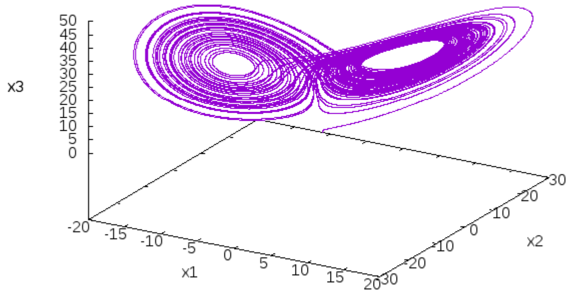

Рис. 2. Фазовый портрет системы Лоренца

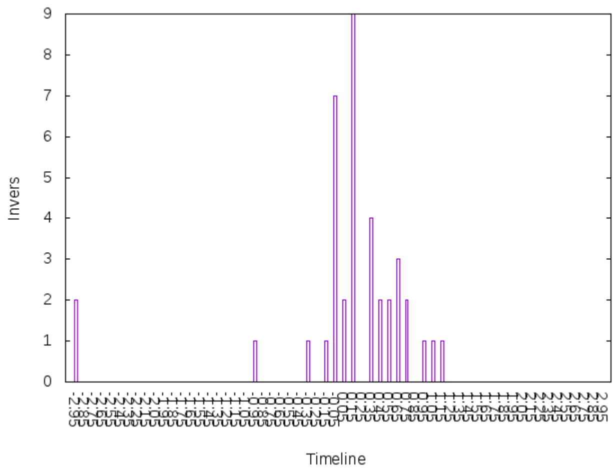

Рис. 3. Гистограмма инверсий переменной x_1

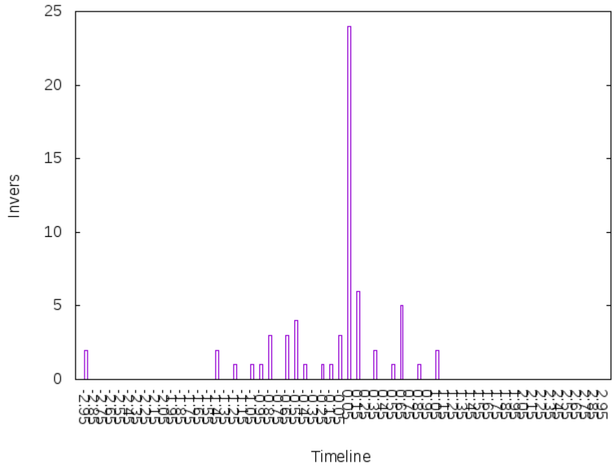

Рис. 4. Гистограмма инверсий переменной x_2

Теперь включим в системе (2) одно мультипликативное шумовое воздействие:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1(r - D_{210}\xi_0 - x_3) - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1x_2 - bx_3, \end{aligned} \tag{3}$$

Возьмем такие же значения σ, r и b как в предыдущем примере. Коффициент $D_{210} = 1$, поток импульсов – пуассоновский.

Фазовый портрет визуально изменился мало (рис. 5), увеличилось число инверсий в переменных x_1 и x_2 (рис. 6, 7).

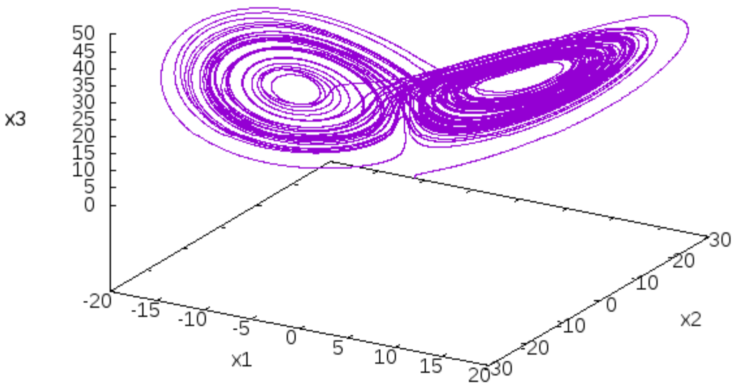

Рис. 5. Фазовый портрет системы Лоренца с мультипликативным шумом

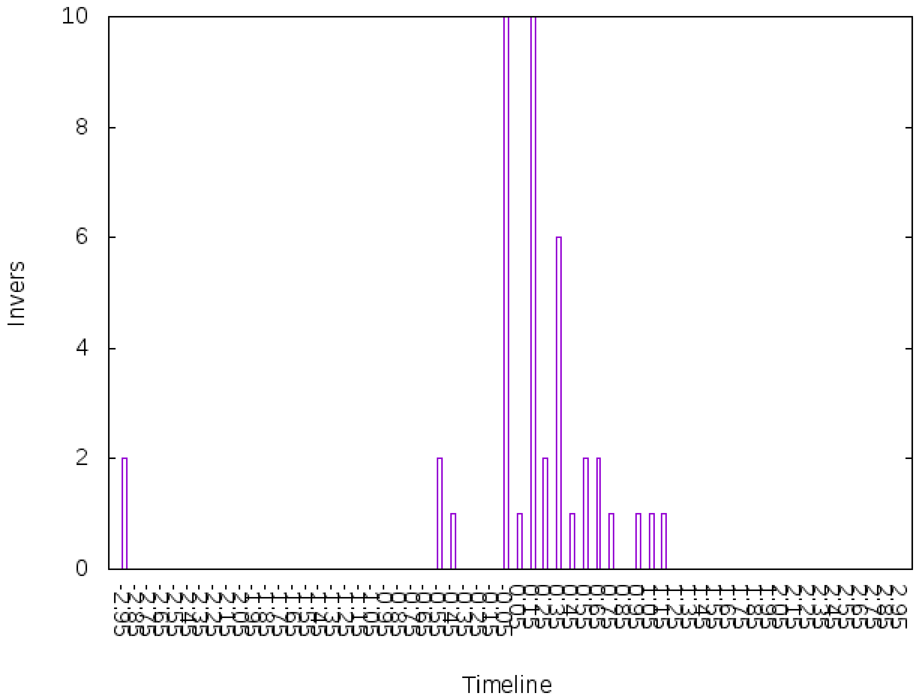

Рис. 6. Гистограмма инверсий переменной x_1 при мультипликативном шуме

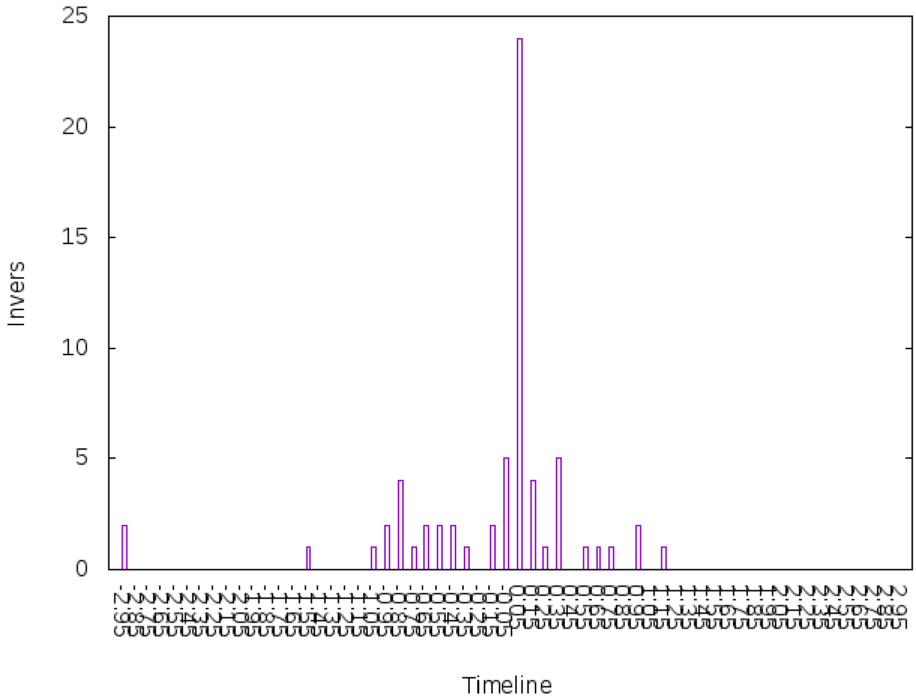

Рис. 7. Гистограмма инверсий переменной x_2 при мультипликативном шуме

В целом, можно сказать, что поведение системы после включения мультипликативного шума стало более хаотичным.

Заключение

В настоящей статье описан программный модуль, предназначенный для численного исследования квадратично-нелинейных динамических систем, подверженных аддитивным и мультипликативным импульсным шумам. Модуль позволяет вести изучение динамики систем, статистики перебросов, изучать взаимодействие динамического хаоса (внутреннего хаоса системы) и внешних флуктуаций.

Список литератруры

[1] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса*, Наука, М., 1988, 368 с. [Zaslavskij G. M., Sagdeev R. Z. Vvedenie v nelinejnuju fiziku. Ot majatnika do turbulentnosti i haosa. Moskva. Nauka, 1988. 368].

[2] Чуличков А. И., *Математические модели нелинейной динамики*, Физматлит, М., 2000, 296 с. [Chulichkov A. I. Matematicheskie modeli nelinejnoj dinamiki. Moskva. Fizmatlit, 2000. 296].

[3] Кляцкин В. И., *Динамика стохастических систем*, Физматлит, М., 2003, 240 с. [Kljackin V. I. Dinamika stohasticheskih sistem. Moskva. Fizmatlit. 2003. 240].

[4] Анищенко В.С., *Знакомство с нелинейной динамикой*, институт компьютерных исследований, Ижевск, 2002, 144 с. [Anishhenko V. S. Znakomstvo s nelinejnoj dinamikoj. Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2002. 144].

[5] Венцель Е.С., Овчаров Л.А., *Теория случайных процессов и ее инженерные приложения*, Высшая школа, М., 2000, 480 с. [Vencel' E. S., Ovcharov L. A. Teorija sluchajnyh processov i ee inzhenernye prilozhenija. Moskva. Vysshaja shkola, 2000. 480].

[6] *Handbook of Computational Statistics. Concepts and Methods.*, ред. Gentle J. E., Härdle W. K., Mori Y., Springer, Heidelberg–Dordrecht–London–New York, 2012, 1192 с.

Список литератруры (ГОСТ)

[1] Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.

[2] Чуличков А. И. Математические модели нелинейной динамики. М.: Физматлит, 2000. 296 с.

[3] Кляцкин В. И. Динамика стохастических систем. М.: Физматлит. 2003. 240 с.

[4] Анищенко В. С. Знакомство с нелинейной динамикой. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 144 с.

[5] Венцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000. 480 с.

[6] Gentle J. E., Härdle W. K., Mori Y. Handbook of Computational Statistics. Concepts and Methods. Heidelberg–Dordrecht–London–New York: Springer, 2012. 1192 p.

Для цитирования: Казаков Е. А. Программный генератор процессов нелинейными динамическими системами с импульсными возмущениями // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2017. № 2(18). С. 81-88. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-81-88

For citation: Kazakov E. A. Program generator processes induced by nonlinear dynamic system with impuls noises, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2017, **18**: 2, 81-88. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-81-88

Поступила в редакцию / Original article submitted: 20.05.2017