

DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-65-75

УДК 517.938

ОСЦИЛЛЯТОР ВАН-ДЕР-ПОЛЯ-ДУФФИНГА С ЭФФЕКТОМ ЭРЕДИТАРНОСТИ

Е. Р. Новикова

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: elizaveta_333@mail.ru

В работе предложена новая математическая модель осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга с внешним периодическим воздействием с учетом эредитарности. Предложен алгоритм нахождения численного решения исходного модельного уравнения, который основан на конечно-разностной схеме. Разработана компьютерная программа, реализующая этот алгоритм. С помощью программы построены осциллограммы и фазовые траектории для эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга в зависимости от различных значениях управляющих параметров.

Ключевые слова: осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга, эредитарность, конечно-разностная схема, фазовые траектории, осциллограммы

© Новикова Е. Р., 2017

MSC 37N30

VAN DER POL-DUFFING OSCILLATOR WITH THE EFFECT OF HEREDITARY

E. R. Novikova

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky,
Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: elizaveta_333@mail.ru

The paper presents a new mathematical model of the van der Pol oscillator, Duffing with external periodic influence given heredity. An algorithm for finding the numerical solution of the original model equation, which is based on the finite-difference scheme. A computer program implementing this algorithm. With this program built waveform and the phase trajectories for heredity oscillator Van der Pol-Duffing.

Keywords: Van der Pol-Duffing oscillator, heredity, finite-difference scheme, phase trajectories, waveform.

© Novikova E. R., 2017

Введение

Эредитарные процессы представляют особый интерес в связи с различными приложениями. Например, в монографии В.В. Учайкина [1] эредитарным процессам посвящена целая глава, там же приведен пример эредитарного осциллятора, который был впервые изучен итальянским математиком В. Вольтерра, а результаты исследований были приведены в его работе [2]. Эффект последствия или эредитарности характеризует зависимость текущего состояния системы от ее предыдущих состояний, необязательно от всех. Математическое описание эффекта памяти дается интегро-дифференциальным уравнением, при чем ядро этого уравнения называется функции памяти. В случае, когда функция памяти имеет степенной вид интегро-дифференциальное уравнение переходит в уравнение с производными дробных порядков, которые изучаются в рамках теории дробного исчисления [3].

Некоторые эредитарные динамические системы были описаны в монографиях [4,5]. В работе автора [6] рассмотрена модель осциллятора Ван-дер-Поля–Дуффинга с учетом эредитарности, которая была решена с помощью конечно-разностной схемы. С помощью численного решения в зависимости от различных значений управляющих параметров были построены осциллограммы и фазовые траектории. В настоящей работе были исследованы вопросы устойчивости и сходимости явной конечно-разностной схемы.

Постановка задачи и методика решения

Модель Ван-дер-Поля –Дуффинга (ВПД) в присутствии периодического внешнего воздействия описывается уравнением:

$$\ddot{x}(t) - (\lambda - x^2(t))\dot{x}(t) + x(t) + \zeta x^3(t) = c \sin(\omega t), \quad (1)$$

где λ – управляющий параметр, ω – частота, a – амплитуда внешнего воздействия, ζ – параметр фазовой нелинейности, определяющий не изохронность колебаний.

Заметим, в уравнении (1) присутствуют нелинейности характерные для осцилляторов Ван-дер-Поля [7] и Дуффинга [8]. Квадратичная нелинейность в коэффициенте при младшей производной, характеризует автоколебания, а кубическая нелинейность – зависимость периода колебаний от амплитуды.

Для уравнения (1) введем начальные условия:

$$x(0) = \xi, \dot{x}(0) = \eta. \quad (2)$$

Задача (1), (2) является классической дифференциальной задачей Коши для уравнения ВПД. Введем эредитарность в уравнение (1). Для этого рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение ВПД:

$$\int_0^t K_1(t-\tau)\ddot{x}(\tau)d\tau - (\lambda - x^2) \int_0^t K_2(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau + x(t) + \zeta x^3(t) - c \sin(\omega t) = 0, \quad (3)$$

где $K_1(t-\tau)$ и $K_2(t-\tau)$ – функции памяти, характеризующие эредитарность.

Отметим, что если функции памяти представляют собой дельта-функции, тогда в системе отсутствует эредитарность. Если функции памяти представляют собой

функции Хэвисайда тогда система обладает полной памятью. Если функции памяти являются степенными функциями, например,

$$K_1(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)}, K_2(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{-\beta}}{\Gamma(1 - \beta)}, 1 < \alpha < 2, 0 < \beta < 1, \quad (4)$$

где $\Gamma(t)$ – гамма-функция Эйлера, тогда говорят, что система - с частичной "потерей памяти".

Подставим функции памяти (4) в интегро-дифференциальное уравнение (3). В результате получим:

$$\frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{1-\alpha}} - \frac{(\lambda - x^2)}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^\beta} + x(t) + \zeta x^3(t) - c \sin(\omega t) = 0. \quad (5)$$

Мы получили интегро-дифференциальное уравнение специального вида. Если обратиться к определению производной дробного порядка по Капуто, то мы приходим к уравнению с дробными производными следующего вида:

$$\partial_{0t}^\alpha x(\tau) - (\lambda - x^2(t)) \partial_{0t}^\beta x(\tau) + x(t) + \zeta x^3(t) - c \sin(\omega t) = 0, \quad (6)$$

где дробные дифференциальные операторы равны

$$\partial_{0t}^\alpha x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{1-\alpha}}, \partial_{0t}^\beta x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^\beta},$$

определенные в смысле Герасимова-Капуто с дробными порядками α и β .

В работе [9] был рассмотрен эредитарный осциллятор Дуффинга, когда модельное уравнение записывалось через производные Римана-Лиувилля дробного постоянного порядка, а в работе [10] – переменного. В работе [11] рассмотрено эредитарное уравнение Ван-дер-Поля.

Можно отметить, что в предельном случае ($\alpha = 2, \beta = 1$) уравнение (6) переходит в классическое уравнение ВПД (1), поэтому можно считать уравнение (1) частным случаем обобщения уравнения (6). Интегро-дифференциальное уравнение ВПД (6) будем называть дробным, или фрактальным уравнением, а процесс, которые оно описывает, будем называть фрактальными, или эредитарными.

Отметим, что функции памяти в интегро-дифференциальном уравнении (5) могут быть отличными от степенных функций, что приводит к другим интегро-дифференциальным уравнениям.

Задача Коши (2), (6) в общем виде не имеет точного решения в силу того, что модельное уравнение является нелинейным, поэтому надо использовать численные методы для ее решения. В качестве численного метода возьмем метод конечно-разностных схем, так как его легко можно реализовать в любой компьютерной среде.

Будем рассматривать равномерную сетку. Для этого разобьем временной интервал $[0, T]$ на N равных частей. В результате получим равномерную сетку $t_j = j\tau$, где шаг сетки $\tau = T/N, j = 0, 1, \dots, N - 1$. Значения искомой функции $x(t_j) = x_j$, будем называть ее сеточной функцией. Аппроксимация дробных операторов задачи Коши (6) осуществляется следующим образом [5]:

$$\partial_{0t}^\alpha x(\tau) \approx \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} a_j \cdot (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}), a_j = (j + 1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha},$$

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\tau) \approx \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} b_j \cdot (x_{k-j+1} - x_{k-j}), b_j = (j+1)^{1-\beta} - j^{1-\beta}.$$

Подставим эти аппроксимации в модельное уравнение (6). Приходим к следующей конечно-разностной задаче:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \xi + \tau\eta, k = 0, \\ x_2 = \frac{1}{A - B(\lambda - x_1^2)} [(2A - B(\lambda - x_1^2) - 1) \cdot x_1 - \zeta x_1^3 - Ax_0 + c \sin(\omega\tau)], k = 1 \\ x_{k+1} = \frac{1}{A - B(\lambda - x_k^2)} \left(\begin{array}{l} (2A - B(\lambda - x_k^2) - 1) \cdot x_k - \zeta x_k^3 - Ax_{k-1} + c \sin(\omega k\tau) + \\ + B(\lambda - x_k^2) \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (b_j(x_{k+1} - x_k)) - A \cdot \sum_{j=1}^{k-1} (a_j(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1})) \end{array} \right), \\ A = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}, B = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}, k = 2, \dots, n-1. \end{array} \right. \quad (7)$$

Отметим, что дифференциальная задача Коши (2), (6) является жесткой при больших значений управляющего параметра λ , поэтому явная конечно-разностная схема (7) будет работать в случае уменьшения шага сетки τ . Оценка шага τ – это отдельная задача, фактически связанная с качественными свойствами схемы (7) – устойчивостью и сходимостью и в настоящей работе не рассматривалась. Будем считать, что значения параметра λ достаточно малы для того, чтобы в процессе вычислений не уменьшать шаг сетки τ , т.е. будем рассматривать лишь «мягкую» задачу Коши (2) и (6).

Результаты моделирования и их обсуждение

Рассмотрим различные примеры работы конечно-разностной схемы (7). Построим осциллограммы и фазовые траектории в зависимости от различных значений управляющих параметров нелинейной эрдитарной колебательной системы ВДП.

Пример 1. (Изменение параметра α). Значения управляющих параметров выберем следующими: $T = 100, N = 2000, \tau = 0.05, c = 5, \omega = 3, \zeta = 2.5, \lambda = 0.3, \beta = 0.9, x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.1$.

На рис. 1 приведены осциллограммы для примера 1, при различных значениях дробного параметра α : $\alpha = 1.9, \alpha = 1.7, \alpha = 1.5, \alpha = 1.3$.

Из рис. 1 видно, что при уменьшении значения дробного параметра α , амплитуда колебаний быстрее выходит на постоянный уровень. Этот факт также подтверждают фазовые траектории (рис. 2), которые выходят на соответствующие предельные циклы.

Пример 2. (Изменение параметра β). Значения управляющих параметров выберем следующими: $T = 100, N = 2000, \tau = 0.05, c = 5, \omega = 3, \zeta = 2.5, \lambda = 0.3, \alpha = 1.9, x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.1$. На рис. 2 приведены осциллограммы для примера 2, при различных значениях дробного параметра β : $\beta = 0.9, \beta = 0.7, \beta = 0.5, \beta = 0.3$.

Из рис. 3 мы можем заметить, что уменьшение значений дробного параметра β существенного изменения в форму осциллограмм не вносит. Колебания со временем выходят на установившийся режим с постоянной амплитудой. Поэтому можно сделать вывод, что фазовые траектории выходят практически на один и тот же предельный цикл (рис. 4).

Пример 3. (Изменение параметра λ). Значения управляющих параметров выберем следующими: $T = 100, N = 2000, \tau = 0.05, \omega = 3, \zeta = 2.5, \lambda = 0.3, \alpha = 1.9, \beta = 0.9, x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.1$.

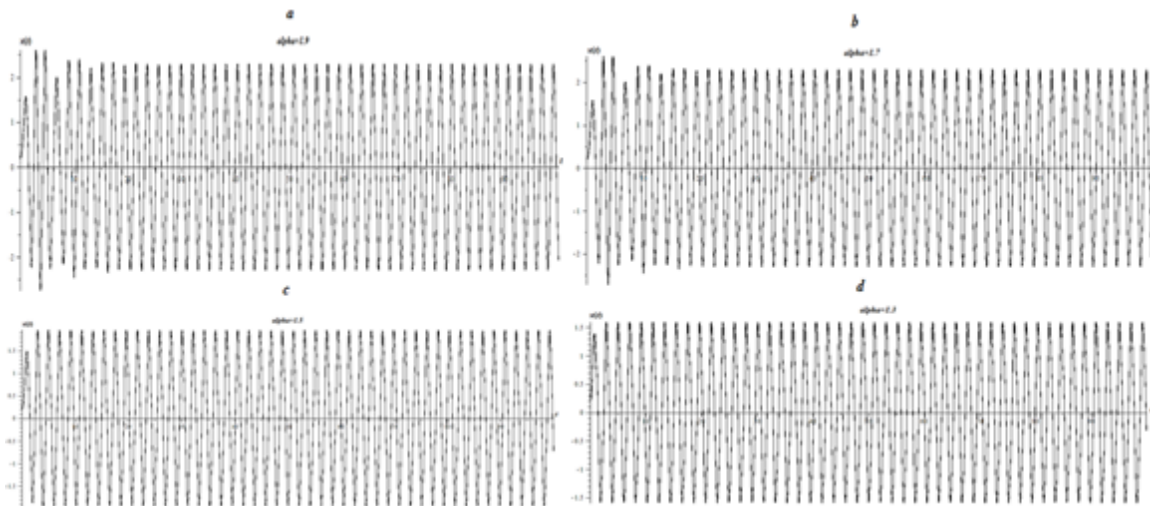


Рис. 1. Осциллограммы, построенные по схеме (7) для примера 1 при различных значениях α

На рис. 5 приведены осциллограммы для примера 3, при различных значениях амплитуды внешнего воздействия $c: c = 0, c = 50, c = 100, c = 200$.

Из рис. 5 видно, что отсутствие внешнего воздействия (рис.5а) приводит к росту амплитуды и начиная с некоторого момента времени ее значения выходят на постоянный уровень. Далее мы видим сложные по форме колебания, которые по-видимому, говорят о возможности много периодических решений задачи Коши (2) и (6). Это косвенно подтверждают соответствующие фазовые траектории (рис. 6).

Устойчивость по начальным данным и правой части

Устойчивость конечно-разностной схемы (7) рассмотрим на примере. Зададим параметры: $t \in [0, T], T = 100, N = 640, \tau = 0.05, x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.1, \alpha = 1, 3, \beta = 0, 3, c = 0.5, \lambda = 0.5, \xi = 0.01, \omega = 6$.

Добавим погрешность в начальное условие ($x(0) = 0.2 + \epsilon$) таблица 1, а так же в начальное условие ($\dot{x}(0) = 0.1 + \epsilon$) таблица 2 и в правую часть ($c \sin(\omega\tau) + \epsilon$) таблица 3 уравнения (1), где $\epsilon = 10^{-5}$. Устойчивость будет определяться по малым изменениям решения задачи Коши на порядок ϵ , иначе решение будет неустойчивым.

Таблица 1

Погрешность в начальном условии ($x(0) = 0.2 + \epsilon$)

τ	ϵ	ϵ_0	δ
1/10	0.0000100000	0.0000100000	0.0000000000
1/20	0.0000100000	0.0000100000	0.0000000000
1/40	0.0000100000	0.0000100000	0.0000000000
1/80	0.0000100000	0.0000100000	0.0000000000
1/100	0.0000100000	0.0000100000	0.0000000000
1/320	0.0000100000	0.0000100000	0.0000000000
1/640	0.0000100000	0.0000100000	0.0000000000

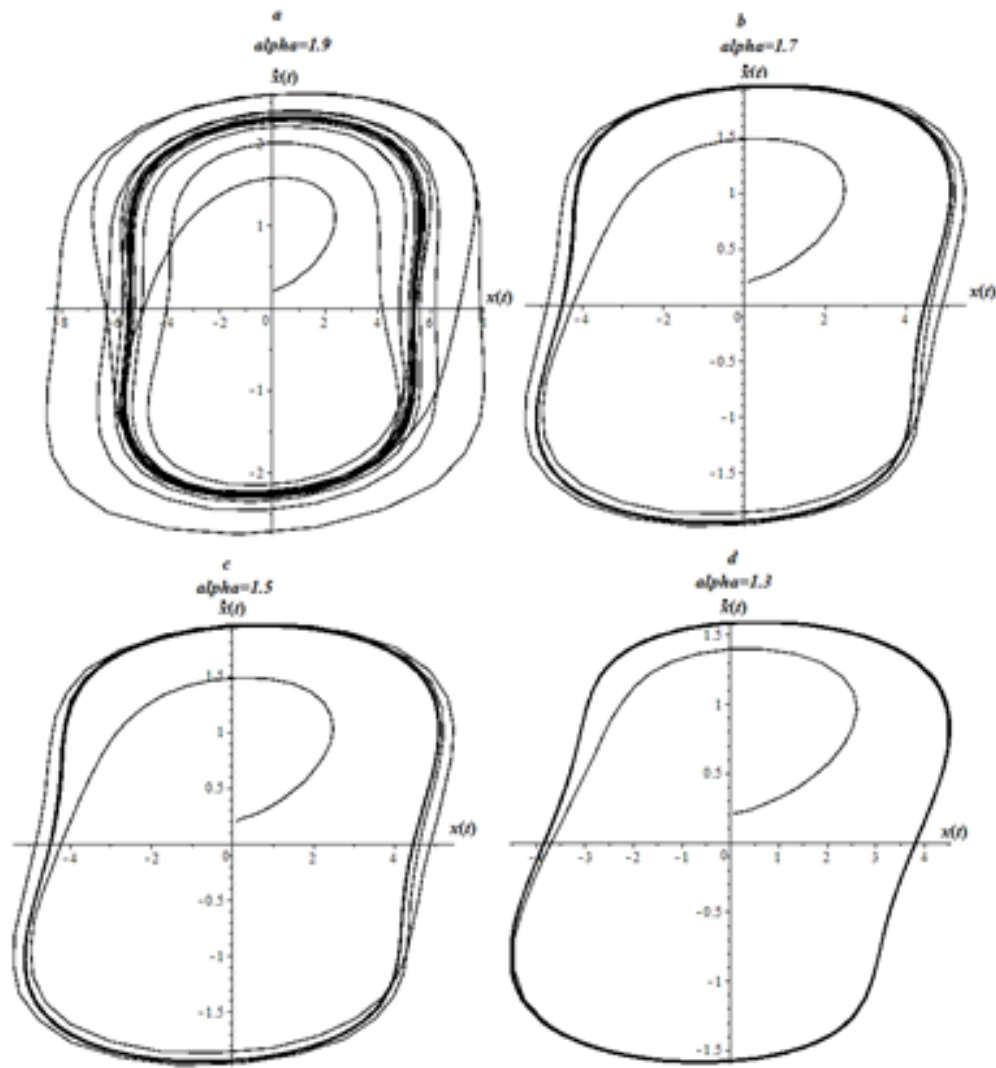


Рис. 2. Фазовые траектории, полученные по схеме (7) для примера 1 при различных значениях α

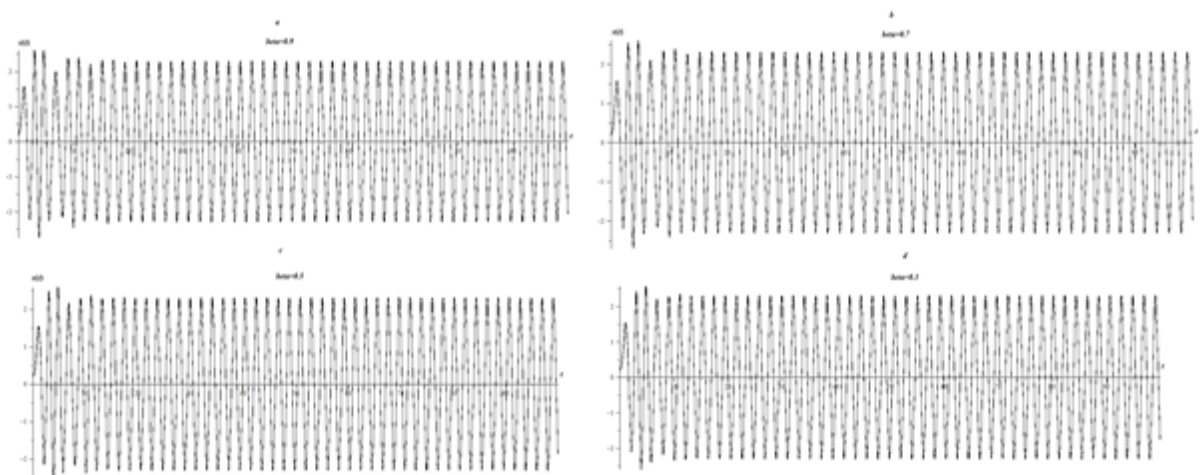


Рис. 3. Осциллограммы, построенные по схеме (8) для примера 2 при различных значениях β

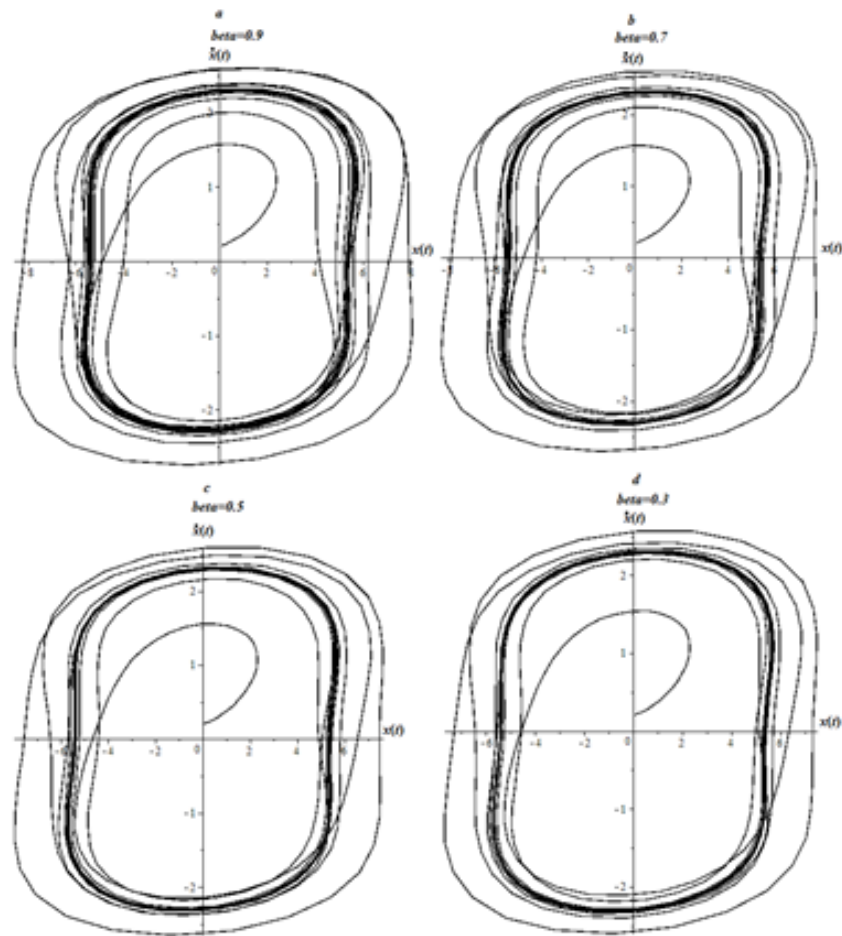


Рис. 4. Фазовые траектории, полученные по схеме (8) для примера 2 при различных значениях β

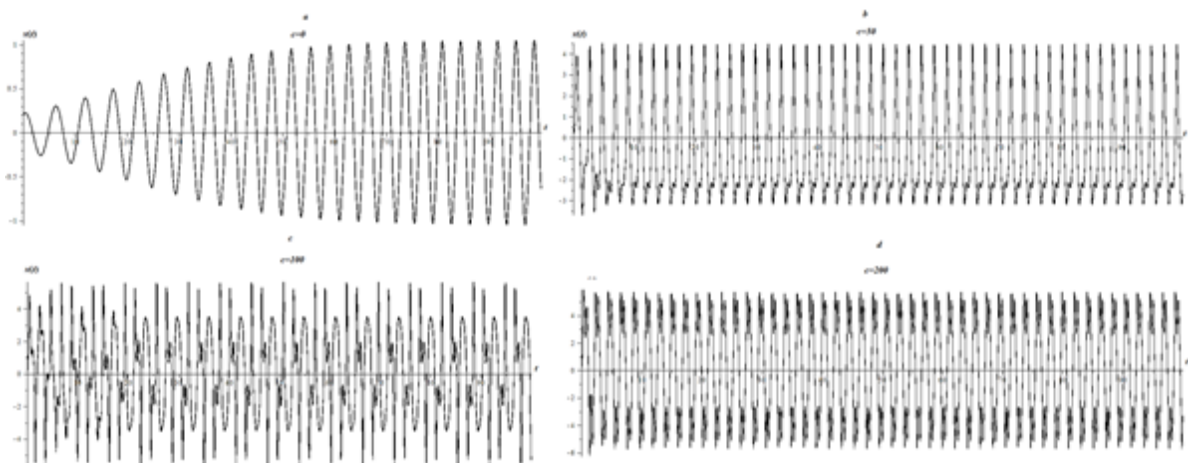


Рис. 5. Осциллограммы, построенные по схеме (7) для примера 5 при различных значениях

В данных таблицах можно увидеть, что в этом примере есть устойчивость по начальным данным и правой части, так как разность имеет порядок ϵ между возмущенным и невозмущенным решениями δ .

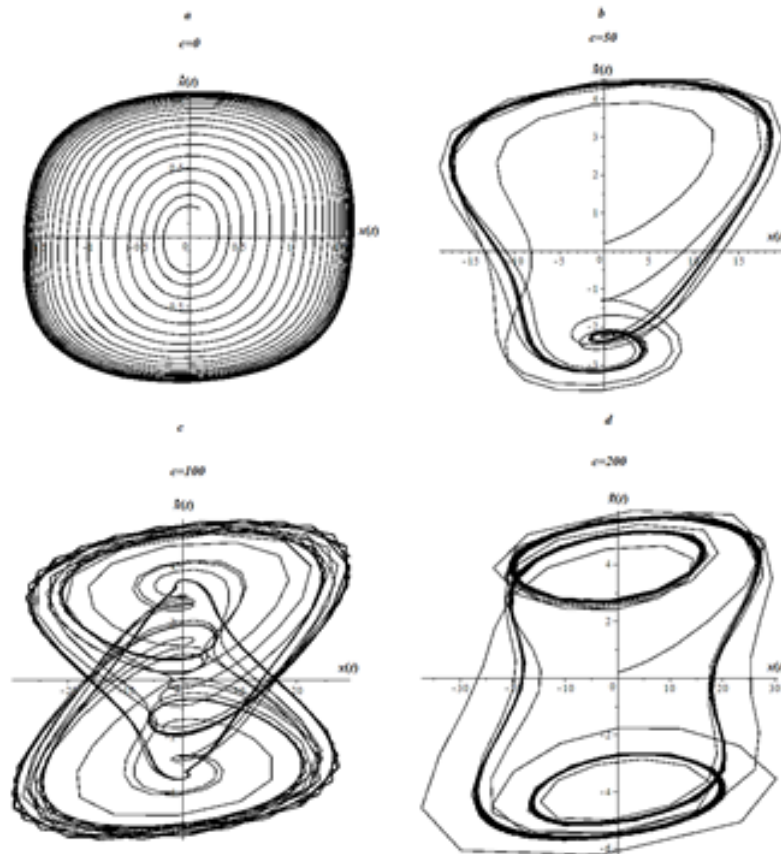


Рис. 6. Фазовые траектории, полученные по схеме (7) для примера 5 при различных значениях c

Таблица 2

Погрешность в начальном условии ($\dot{x}(0) = 0.1 + \epsilon$)

τ	ϵ	ϵ_0	δ
1/10	0.0000100000	0.0000067584	0.0000032416
1/20	0.0000100000	0.0000068737	0.0000031263
1/40	0.0000100000	0.0000069177	0.0000030823
1/80	0.0000100000	0.0000069349	0.0000030651
1/100	0.0000100000	0.0000069463	0.0000030537
1/320	0.0000100000	0.0000069410	0.0000030590
1/640	0.0000100000	0.0000069385	0.0000030615

Таблица 3

Погрешность в правой части ($c \sin(\omega\tau) + \epsilon$)

τ	ϵ	ϵ_0	δ
1/100	0.00001	0.0000062348	0.0000037652

Сходимость явной конечно-разностной схемы

Явные схемы часто оказываются неустойчивыми. Проверив на погрешность и расчетную точность, конечно-разностную задачу (7), при различных параметрах α и β , получили таблицу:

Таблица 4

Различные значения параметров α и β

$\alpha = 1,8$ и $\beta = 0,7$			
N	τ	Абсолютная ошибка (ε)	Порядок точности (p)
10	1/10	0.0053184060	1.748013896
20	1/20	0.0028937180	1.584549772
40	1/40	0.0015242037	1.480201676
80	1/80	0.0007898903	1.407560951
100	1/100	0.0006379337	1.388606172
320	1/320	0.0002070582	1.312783784
640	1/640	0.0001150653	1.267714659
1000	1/1280	0.0001172922	1.190758906
$\alpha = 1,5$ и $\beta = 0,5$			
10	1/10	0.0061931641	1.697184092
20	1/20	0.0031656850	1.560198941
40	1/40	0.0016032503	1.468663431
80	1/80	0.0008087656	1.402907897
100	1/100	0.0006484365	1.385524114
320	1/320	0.0002045031	1.314705450
640	1/640	0.0001024655	1.283924284
1000	1/1280	0.0000657044	1.267000164
$\alpha = 1,3$ и $\beta = 0,3$			
10	1/10	0.0060793337	1.703376574
20	1/20	0.0030140867	1.573501787
40	1/40	0.0015031565	1.483374838
80	1/80	0.0007508915	1.417537537
100	1/100	0.0006006957	1.399958055
320	1/320	0.0001878061	1.327887142
640	1/640	0.0000938475	1.296203775
1000	1/1280	0.0000602630	1.278373495

Расчёт порядка точности осуществлялся по формуле: $p = \ln(|\varepsilon|) / \ln(\tau/2)$, а для вычисления абсолютной ошибки использовалось правило Рунге: $\varepsilon = \max \left(\frac{|x_i - x_{2i}|}{2^p - 1} \right)$, где $i = 1 \dots N$. Априорную точность p решения в данном методе положим равной 1.

Здесь мы видим, что абсолютная ошибка $\varepsilon \rightarrow 0$ (уменьшается), при увеличении количества точек, что приводит к более точному решению задачи.

Заключение

В заключении хочется отметить, что наличие различных колебательных режимов эредитарного осциллятора ВПД, требует дальнейшего его изучение. Например, интерес представляет построение карт динамических режимов и сечений Пуанкаре с целью классификации периодических решений, а также устойчивости точки покоя [12].

Другое направление исследований заключается в изучение качественных свойств конечно-разностной схемы (7) [13], а также жесткости задачи Коши (2), (6). Так же справедливо дальнейшее обобщение задачи Коши (2), (6) в случае функций $\alpha(t), \beta(t)$ по аналогии с работами [13-15].

Список литературы

- [1] Учайкин В. В., *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008, 512 с. [Učajkin V. V. Metod drobných proizvodnyh. Ul'janovsk: Artishok, 2008. 512].
- [2] Volterra V., "Sur les 'equations int'egro-diff'erentiellese leurs applications", *Acta Mathematica*, **35**:1 (1912), 295-356.
- [3] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nahushev A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie. Moskva. Fizmatlit, 2003. 272].
- [4] Petras I., "Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation", 2011, 218 с.
- [5] Паровик Р. И., *Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов.*, КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 2015, 178 с. [Parovik R. I. Matematicheskoe modelirovanie linejnyh jereditarnyh oscilljatorov. Petropavlovsk-Kamchatskij: KamGU im. Vitusa Beringa. 2015. 178].
- [6] Новикова Е. Р., "Математическая модель эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга", *Международный студенческий научный вестник*, 2017, № 2. <https://www.eduherald.ru/ru/article/view?id=16872> (дата обращения: 11.06.2017). [Novikova E. R. Matematicheskaja model' jereditarnogo oscilljatora Van-der-Polja-Duffinga. Mezhdunarodnyj studencheskij nauchnyj vestnik. 2017. no 2.].
- [7] Паровик Р. И., "Математическая модель фрактального осциллятора Ван дер Поля", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:2 (2015), 57-62. [Parovik R. I. Matematicheskaja model' fraktal'nogo oscilljatora Van der Polja. Doklady Adygskoj (Cherkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk. 2015. vol. 17. no 2. 57-62.].
- [8] Паровик Р. И., "Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2015, № 1(10), 18-24. [Parovik R. I. Matematicheskoe modelirovanie nelokal'noj kolebatel'noj sistemy Duffinga s fraktal'nyum treniem. Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki. 2015. no 1(10). 18-24].
- [9] Дробышева И. В., "Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов на примере осциллятора Дуффинга с дробными производными в смысле Римана-Лиувилля", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2016, № 2(13), 43-49. [Drobysheva I. V. Matematicheskoe modelirovanie nelinejnyh jereditarnyh oscilljatorov na primere oscilljatora Duffinga s drobnymi proizvodnymi v smysle Rimana-Liuvillja. Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki. 2016. no 2(13). 43-49].
- [10] Ким В. А., "Осциллятор Дуффинга с внешним гармоническим воздействием и производной переменного дробного порядка Римана-Лиувилля, характеризующая вязкое трение", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2016, № 2(13), 50-54. [Kim V. A. Oscilljator Duffinga s vneshnim garmonicheskim vozdejstviem i proizvodnoj peremennogo drobnogo porjadka Rimana-Liuvillja, harakterizujushhaja vjazkoe trenie. Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki. 2016. no 2(13). 50-54.].
- [11] Паровик Р. И., "Математическая модель фрактального осциллятора Ван-дер-Поля", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:2 (2015), 57-62. [Parovik R. I. Matematicheskaja model' fraktal'nogo oscilljatora Van-der-Polja. Doklady Adygskoj (Cherkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk. 2015. vol. 17. no 2. 57-62.].
- [12] Паровик Р. И., "Об исследовании устойчивости эредитарного осциллятора Ван дер Поля", *Фундаментальные исследования*, 2016, № 3-2, 283-287. [Parovik R. I. Ob issledovanii ustojchivosti jereditarnogo oscilljatora Van der Polja. Fundamental'nye issledovanija. 2016. no 3-2. 283-287].
- [13] Parovik R. I., "Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable order fractional derivatives", *Archives of Control Sciences*, **26**:3 (2016), 429-435.
- [14] Паровик Р. И., "Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математический*, 2015, № 2(11), 88-85. [Parovik R. I. Konechno-raznostnye shemy dlja fraktal'nogo oscilljatora s peremennymi drobnymi porjadkami. Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskij. 2015. no 2(11). 88-85.].

- [15] Паровик Р. И., “О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка от времени”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2014, № 1(8), 60-65. [Parovik R.I. O chislennom reshenii uravnenija fraktal'nogo oscilljatora s proizvodnoj drobnogo peremennogo porjadka ot vremeni. Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki. 2014. no 1(8). 60-65].

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
- [2] Volterra V. Sur les 'equations int'egro-diff'erentielles et leurs applications // *Acta Mathematica*. 1912. Vol. 35, no. 1. P. 295-356.
- [3] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
- [4] Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 218 p.
- [5] Паровик Р. И. Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга. 2015. 178 с.
- [6] Новикова Е. Р. Математическая модель эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга // *Международный студенческий научный вестник*. 2017. № 2. URL: <https://www.eduherald.ru/ru/article/view?id=16872> (дата обращения: 11.06.2017).
- [7] Паровик Р. И. Математическая модель фрактального осциллятора Ван дер Поля // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*. 2015. Т. 17. №2. С. 57-62.
- [8] Паровик Р. И. Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2015. №1(10). С. 18-24.
- [9] Дробышева И. В. Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов на примере осциллятора Дуффинга с дробными производными в смысле Римана-Лиувилля // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2016. №2(13). С. 43-49
- [10] Ким В. А. Осциллятор Дуффинга с внешним гармоническим воздействием и производной переменного дробного порядка Римана-Лиувилля, характеризующая вязкое трение // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2016. №2(13). С. 50-54.
- [11] Паровик Р. И. Математическая модель фрактального осциллятора Ван-дер-Поля // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*. 2015. Т. 17. № 2. С. 57-62.
- [12] Паровик Р. И. Об исследовании устойчивости эредитарного осциллятора Ван дер Поля // *Фундаментальные исследования*. 2016. №3-2. С. 283-287.
- [13] Parovik R.I. Explicit finite-difference scheme for the numerical solution of the model equation of nonlinear hereditary oscillator with variable order fractional derivatives // *Archives of Control Sciences*. 2016. vol. 26. no 3. pp. 429-435.
- [14] Паровик Р. И. Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математический*. 2015. № 2(11). С. 88-85.
- [15] Паровик Р. И. О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка от времени // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2014. № 1 (8). С. 60-65.

Для цитирования: Новикова Е. Р. Осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга с эффектом эредитарности // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2017. № 2(18). С. 65-75. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-65-75

For citation: Novikova E. R. Van der Pol-Duffing Oscillator with the effect of hereditary, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2017, **18**: 2, 65-75. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-65-75

Поступила в редакцию / Original article submitted: 20.05.2017