DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-59-64

УДК 517.938

ОБ ОДНОМ МОДЕЛЬНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ БЕРНУЛЛИ

С. В. Мышкин

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: MifistJohn@gmail.com

В статье рассмотрено модельное интегро-дифференциальное уравнение Бернлулли. Это уравнение сводилось к дифференциальному уравнению с производными дробных порядков и решалось численно с помощью итерационного метода Ньютона. В зависимост от раличных значений управляющих параметров были построены расчетные кривые.

Ключевые слова: уравнения Бернулли, метод Ньютона, производная дробного порядка

MSC 37N30

ON ONE MODEL INTEGRAL-DIFFERENTIAL BERNULL EQUATION

S. V. Myshkin

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: MifistJohn@gmail.com

The model integro-differential Bernlulli equation is considered in the paper. This equation was reduced to a differential equation with derivatives of fractional orders and solved numerically with the help of Newton's iteration method. Depending on the values of the control parameters, calculated curves were constructed.

Keywords: Bernoulli equations, Newton's method, the derivative of a fractional order

Введение

В последние годы дробные дифференциальные уравнения (ДДУ) и дробные интегро-дифференциальные уравнения (ДИДУ) становятся предметом исследования как в математике, так и в разных областях науки. Потребность в ДДУ И ДИДУ объясняется тем что, современным моделям необходимо наличие эффекта памяти, имеющего зависимость не только от момента времени, но и от предыдущих данных, которые могут быть успешно получены при использовании дробного исчисления.

Развитие теории эредитарных динамических систем началось с работы итальянского математика Вито Вольтера , который ввел термин эредитарность для описания эффекта последействия или памяти и впервые исследовал эредитарный осциллятор [1]. Математическое описание эредитарного осциллятора представляло собой интегро-дифференциальное уравнение с ядром, которое называется функцией памяти. В дальнейшем исследования эредитарных динамических систем были связаны с выбором функции памяти. В силу, того что различные среды могут обладать фрактальными свойствами, то функцию памяти целесообразно выбрать степенной. Тогда интегро-дифференциальные уравнения можно переписать как дифференциальные уравнения дробных порядков, теория которых достаточно хорошо разработана [2]. В литературе такие уравнения называют фрактальными, они описывают процессы с частичной потерей памяти. Фрактальные динамические системы наиболее полно исследовались в монографиях [3-5] и могут быть, например, использованы при моделировании экономических процессов [6-8].

Одним из таких уравнений, описывающих эредитарные динамические системы может быть эредитарное уравнение Бернулли.

Постановка задачи и методика решения

Рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\dot{x}(\eta)\,d\eta}{(t-\eta)^{\alpha}} + a(t)x(t) = b(t)x^{\beta}(t), \beta \neq 0, 0<\alpha<1, \tag{1}$$

где $a(t), b(t)$ – заданные функции, $t \in [0,T]$ – время, $T>0$ – время моделирование процесса.

Уравнение (1) является аналогом уравнения Бернулли или его обобщение на случай эредитарности.

Уравнение (1) можно переписать в терминах производной Герасимова-Капуто дробной порядка α в виде:

$$\partial_{0t}^{\alpha}x(\eta) + a(t)x(t) = b(t)x^{\beta}(t), \tag{2}$$

для которого справедливо локальное начальное условие:

$$x(0) = \varphi, \varphi - const. \tag{3}$$

Задача (2) и (3) является задачей Коши, которую мы будет в дальнейшем исследовать. Заметим, что в случае когда в уравнении (1) $\beta = 2$, то оно переходит в эредитарное уравнение Риккати, которое в частном случае было исследовано в работе [9]. В случае, когда $\alpha = 1$, то мы получим классическое уравнение Бернулли.

В силу того, что уравнение (2) является нелинейным, то задачу Коши (2) и (3) будем решать с помощью численных методов. Для этого необходимо временной интервал $[0,T]$ разбить на N равных частей с шагом дискретизации $\tau = T/N$. Функцию решения $x(t)$ будем аппроксимировать сеточной функцией $x(t_j)$ и функции $a(t), b(t)$ функциями a_j и b_j. Дробную производную Герасимова-Капуто в уравнении (2) аппроксимируем согласно работе [10]:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(\eta) \approx \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} w_k \left(x_{j-k+1} - x_{k-j}\right), w_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}, j = 1, \ldots, N-1. \quad (4)$$

С учетом аппроксимации (4) от дифференциальной задачи Коши (2) и (3) переходим к дискретной задаче Коши вида:

$$\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} w_k \left(x_{j-k+1} - x_{k-j}\right) + a_j x_j = b_j x_j^{\beta}, x_0 = \varphi. \quad (5)$$

Задача Коши (5) представляет собой систему алгебраических уравнений, которую мы решим с помощью метода Ньютона [11]. Метод можно представить в виде итерационной формулы:

$$X^{m+1} = X^m - J^{-1}(X^m) F(X^m), \quad (6)$$

где $F(X^m)$ – вектор, содержащий нелинейные члены системы (5), m – число итераций, $J(X^m)$ – матрица Якоби с определителем $|J(X^m)| \neq 0$ для обеспечения сходимости метода.

Результаты моделирования

Рассмотрим работу метода (6) на примере. Выберем функции $a(t) = \sin(t)$ и $b(t) = \cos(t)$, $\beta = -2$, количество расчетных точек $N = 100$, а время моделирования $T = 30$. Точность $\varepsilon = 10^{-5}$.

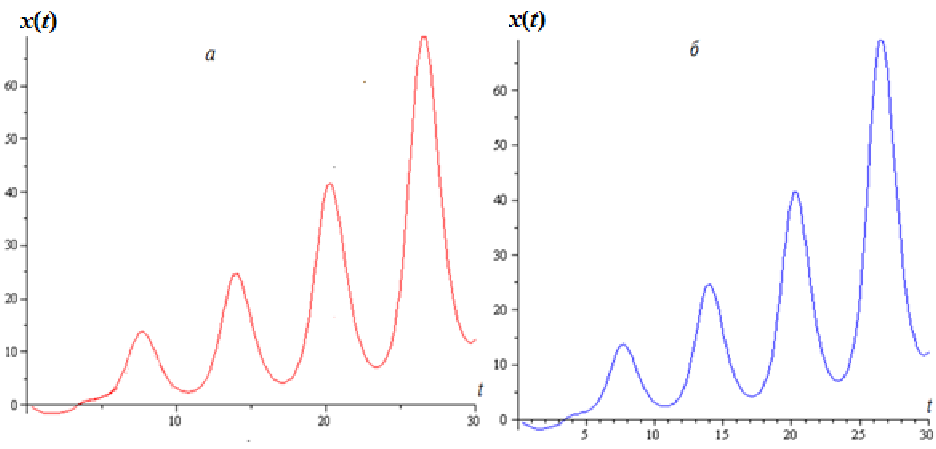

Рис. 1. Расчетные кривые: кривая а - получена по методу (6) при $\alpha = 0.99$; кривая б - точное решение классического уравнения Бернулли

Из рис. 1 можно сделать вывод, что численное решение совпадает с классическим при $\alpha \to 1$, причем сходимость с нужной точностью наступила за четыре итерации, что свидетельствует о хорошей скорости сходимости метода для этого примера.

Рассмотрим другой пример, когда функции $a(t) = 2\exp(t), b(-t) = 4\exp(-t)$, а остальные параметры возьмем из предыдущего примера.

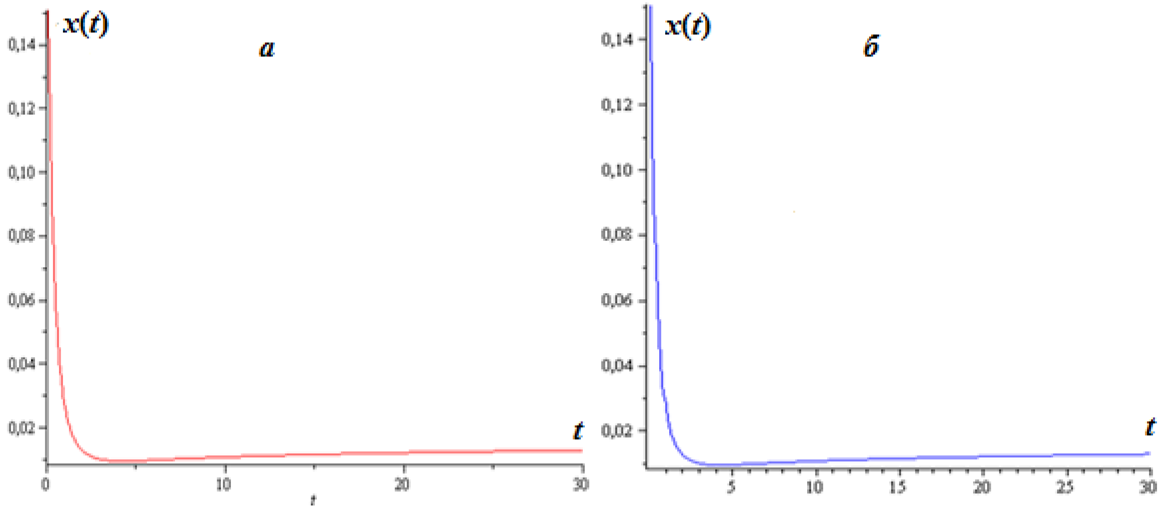

Рис. 2. Расчетные кривые: кривая а - получена по методу (6) при $\alpha = 0.99$; кривая б - точное решение классического уравнения Бернулли

Аналогично можно заметить (рис. 2), что и в этом случае метод работает хорошо при $\alpha \to 1$, сходимость метода с нужной точностью для этого примера наступила за три итерации.

В случае медленной сходимости метода необходимо использовать модифицированный метод Ньютона или другие численные методы.

Заключение

В работе предложено эредитарное уравнение Бернулли, с помощью метода Ньютона получено численное решение и построены расчетные кривые. Показано, что в предельном случае, когда $\alpha \to 1$ расчетные кривые, полученные по численному методу хорошо согласуются с точным решением для классического уравнения Бернулли. Сходимость метода с заданной точностью составила первые итерации, что говорит о хорошей скорости сходимости.

Одно из дальнейших продолжений этой работы может быть обобщение уравнения (2) на случай переменной эредитарности согласно работам [12,13]. Здесь может возникнуть обратная задача при наличии экспериментального материала: восстановить переменный порядок дробной производной по имеющимся данным, что даст представление об изменении фрактальной размерности среды. С другой стороны интерес представляет случай, когда переменный порядок производной представляет собой случайную функцию.

Автор выражает благодарность научному руководителю, к.ф.-м.н., Р.И. Паровику за ценные советы и замечания по содержанию данной научной статьи.

Список литературы

[1] Volterra V., "Sur les 'equations int'egro-diff'erentielles et leurs applications", *Acta Mathematica*, **35**:1. (1912), 295-356.

[2] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его приложения*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nahushev A. M. Drobnoe ischislenie i ego prilozhenija. Moskva. Fizmatlit, 2003. 272].

[3] Petras I., *Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation*, Springer, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, 218 с.

[4] Tarasov V. E., *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Springer, New York, 2011, 505 с.

[5] Учайкин В. В., *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008, 512 с. [Uchajkin V. V. Metod drobnyh proizvodnyh. Ul'janovsk: Artishok, 2008. 512].

[6] Tarasova V. V., Tarasov V. E., "Elasticity for economic processes with memory: Fractional differential calculus approach", *Fractional Differential Calculus*, **6**:2 (2016), 219–232.

[7] Makarov D. V., Parovik R. I., "Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus", *Journal of Internet Banking and Commerce*, **21**:S6 (2016).

[8] Самута В. В., Стрелова В. А., Паровик Р. И., "Нелокальная модель неоклассического экономического роста Солоу", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2012, № 2(5), 37-41. [Samuta V. V., Strelova V. A., Parovik R. I. Nelokal'naja model' neoklassicheskogo jekonomicheskogo rosta Colou.Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki. 2012. vol. 5. no 2. 37-41.].

[9] Твердый Д. А., "Уравнение Риккати с переменной эредитарностью", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2017, № 1(17), 44-53. [Tverdyj D. A. Uravnenie Rikkati s peremennoj jereditarnost'ju. Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki. 2017. no 1(17). 44-53.].

[10] Паровик Р. И., *Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов*, КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 2015, 178 с. [Parovik R. I. Matematicheskoe modelirovanie linejnyh jereditarnyh oscilljatorov. Petropavlovsk-Kamchatskij: KamGU im. Vitusa Beringa. 2015. 178].

[11] Sweilam N. H., Khader M. M., Mahdy A. M. S., "Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation", *Applications and Applied Mathematics*, **7**:2 (2012), 595-608.

[12] Паровик Р. И., "О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка от времени", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2014, № 1(8), 60-65. [Parovik R. I. O chislennom reshenii uravnenija fraktal'nogo oscilljatora s proizvodnoj drobnogo peremennogo porjadka ot vremeni. Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki. 2014. no 1 (8). 60-65.].

[13] Паровик Р. И., "Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2015, № 2(11), 88-95. [Parovik R. I. Konechno-raznostnye shemy dlja fraktal'nogo oscilljatora s peremennymi drobnymi porjadkami. Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki. 2015. no 2 (11). 88-95.].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Volterra V. Sur les 'equations int'egro-diff'erentielles et leurs applications // Acta Mathematica. 1912. vol. 35, no. 1. P. 295-356.

[2] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 272 с

[3] Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 218 p.

[4] Tarasov V. E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. New York: Springer, 2011. 505 c.

[5] Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

[6] Tarasova, V.V., Tarasov, V. E. Elasticity for economic processes with memory: Fractional differential calculus approach // Fractional Differential Calculus. 2016. vol. 6. № 2. P. 219–232.
[7] Makarov D. V., Parovik R. I. Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus // Journal of Internet Banking and Commerce. 2016. T. 21. № S6. C. 8.
[8] Самута В. В., Стрелова В. А., Паровик Р. И. Нелокальная модель неоклассического экономического роста Солоу // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2012. Т. 5. № 2. С. 37-41.
[9] Твердый Д. А. Уравнение Риккати с переменной эредитарностью // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2017. № 1(17). С. 44-53.
[10] Паровик Р. И. Математическое моделирование линейных эредитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга. 2015. 178 с.
[11] Sweilam N. H., Khader M. M., Mahdy A. M. S. Numerical studies for solving fractional Riccati differential equation // Applications and Applied Mathematics. 2012. Т. 7. №. 2. С. 595-608.
[12] Паровик Р. И. О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка от времени // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2014. № 1 (8). С. 60-65.
[13] Паровик Р. И. Конечно-разностные схемы для фрактального осциллятора с переменными дробными порядками // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2015. №. 2 (11). С. 88-95.

Для цитирования: Мышкин С. В. Об одном модельном интегро-дифференциальном уравнении Бернулли // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2017. № 2(18). C. 59-64. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-59-64

For citation: Myshkin S. V. On one model integral-differential Bernull equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2017, **18**: 2, 59-64. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-59-64

Поступила в редакцию / Original article submitted: 25.05.2017